

ECUACIONES DIFERENCIALES CON MAPLE

Silvana Beatriz Dip, Universidad Nacional de Salta- Facultad de Ingeniería,
sibedip@gmail.com

Beatriz Emilce Copa, Universidad Nacional de Salta – Facultad de Ingeniería,
beaemil@gmail.com

Resumen— En la cátedra de Análisis Matemático II de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta, se incluye el tema de ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes. Las soluciones de las ecuaciones diferenciales de segundo y hasta tercer orden operacionalmente resultan fáciles de resolver manualmente, pero en los casos de orden superior el cálculo presenta mayor complejidad.

En este trabajo se mostrará, que mediante la utilización de los comandos de software Maple, se optimiza el tiempo de resolución de las ecuaciones diferenciales homogéneas y no homogéneas de orden mayor a tres. En comparación con el uso de los recursos habituales, Maple permite analizar la influencia de los coeficientes y del término no homogéneo, facilitando la visualización de las soluciones en forma gráfica. Esto permite que en el proceso de enseñanza - aprendizaje se destine mayor tiempo a lo conceptual.

Palabras clave— *Maple, ecuaciones diferenciales, comandos.*

1. Introducción

En la asignatura Análisis Matemático II (AMII), que se dicta para todas las carreras de ingeniería, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta, como último tema de su programa se incluye parte de un tema fundamental en la formación del ingeniero: Ecuaciones Diferenciales lineales a coeficientes constantes, el cual tiene aplicaciones importantes. Este tema presenta una articulación vertical, ya que su desarrollo se inicia en Análisis Matemático I y continúa su tratamiento en Matemática Aplicada.

El tipo de ecuaciones diferenciales que se estudia en AMII, tiene una característica importante, ya que a partir del estudio de las de segundo orden se puede realizar la generalización a ecuaciones diferenciales de orden mayor, tanto de su ecuación homogénea asociada como así también de la no homogénea.

En el desarrollo de una competencia, como lo es el uso de la tecnología en la búsqueda y apropiación de contenidos en forma autónoma, se exige al alumno poner en práctica habilidades técnicas [1], establecer relaciones entre práctica y teoría y utilizar lo aprendido en diversas situaciones.

Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto, en la cátedra de AMII, se ha implementado el uso de Software Maple desde el año 2001, Almazán y otros [2], cuyo objetivo es propiciar el uso de la computadora como una herramienta que permita renovar estrategias metodológicas, logrando que el alumno adquiera destreza en el uso del software. Además

que el alumno logre realizar un análisis crítico de los resultados obtenidos y a la vez puedan alcanzar un aprendizaje significativo de los conceptos más relevantes.

En este trabajo se mostrará, que mediante la utilización de los comandos de software Maple, se optimiza el tiempo de resolución de las ecuaciones diferenciales homogéneas y no homogéneas de orden mayor a tres. En comparación con el uso de los recursos habituales, este software permite analizar la influencia de los coeficientes y del término no homogéneo, facilitando la visualización de las soluciones en forma gráfica. Esto permite que en el proceso de enseñanza - aprendizaje se destine mayor tiempo a lo conceptual [4]. Esto también es verificado a través de encuestas [3], realizadas a alumnos que cursan diferentes años de la carrera y que han promocionado la asignatura.

2. Materiales y métodos

Se realizaron dos encuestas a los alumnos que promocionaron AMII, en una de ellas, se les consultó a algunos de los alumnos que promocionaron en el 2do cuatrimestre de 2017 sobre la resolución del Trabajo Práctico N°12, correspondiente al tema mencionado: Ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes, mediante el uso del software Maple. A continuación se muestra la encuesta realizada.

Encuesta para alumnos Promocionados con respecto al TP 12

1. ¿Resolviste el TP de ecuaciones diferenciales aplicando Maple? *

- SI
 NO

2. Si la respuesta es si, comparando el tiempo empleado en la resolución sin el empleo del Software y usándolo podrías afirmar que:

- Con Maple la resolución fue mas simple y breve
 Con Maple la resolución fue similar en tiempo y complejidad
 Sin Maple la resolución fue más simple y breve

3. ¿Podrías señalar que ventajas consideras que aporta el uso del Maple?

- Ahorra tiempo de cálculo
 permite realizar multiples tareas (calcular, graficar, comparar)
 Facilita la interpretación de problemas y graficos
 Permite intercambiar comandos para un mismo calculo y diseñar distintas estrategias de resolución

Figura 1. Encuesta a alumnos que promocionaron 2do Cuatrimestre 2017.

Fuente: elaboración propia

Otra encuesta se realizó a alumnos promocionados, de diferentes años, se preguntó acerca de si estaban de acuerdo con la implementación del software Maple y además el porqué.

También en este trabajo se plantea a los alumnos auxiliares docentes de segunda categoría de la cátedra de AMII una guía con ejercicios solicitándoles la resolución de ecuaciones diferenciales de hasta tercer grado homogéneas y no homogéneas con condiciones iniciales limitando el tiempo a una hora y media. Los mismos debían ser resueltos en la forma convencional, lápiz y papel, con acceso a bibliografía y a continuación mediante la utilización del software Maple, para finalmente responder una encuesta donde se solicitaba una apreciación sobre la experiencia.

La elección de presentarles esta propuesta a los alumnos auxiliares docentes de la cátedra se hace ya que debido a su experiencia en la misma, el resolver los ejercicios no debía traer dificultades.

Esto se realizó para tener una visión de las ventajas y desventajas percibidas por los alumnos de la utilización del software Maple. A continuación se detalla este material.

Ejercicios y encuesta para los Auxiliares Docentes de Segunda

a) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales por el método de variación de parámetros manualmente, luego con el software Maple

1) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$

2) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = \sin x$

3) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = \sec 2x$

4) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^{3x}$

b) Determinar las soluciones para las siguientes condiciones de valor inicial en forma tradicional y con Maple

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \quad y''(0) = -1$$

c) Graficar las soluciones de las ecuaciones 1a 4 en un mismo par de ejes coordenados manualmente y con Maple en distintos colores para $0 \leq x \leq 2$

d) Responder la siguiente encuesta

1. Comparativamente al resolver los ejercicios propuestos, si lo hiciste según el cálculo tradicional

- Te llevó el doble de tiempo que si resolviste con Maple
- No pudiste resolverlos en un tiempo razonable
- No pudiste resolverlos

2. ¿podrías señalar qué ventajas consideras que aporta el uso de Maple en este tema?

- Ahorra tiempo de cálculo
- Permite realizar múltiples tareas (calcular, graficar, comparar, etc.)
- Facilita la interpretación de problemas y gráficos
- Permite visualizar la influencia de los distintos términos independientes
- Otras, especificar

3. ¿Por qué piensa que la cátedra propone el uso de Maple como recurso?
4. ¿Está de acuerdo con la implementación de Maple?, ¿qué modificaciones o sugerencias propondría?

3. Resultados de las encuestas y guías resueltas

En primer lugar se analizarán los resultados de las encuestas realizadas a 45 alumnos que promocionaron en el 2do cuatrimestre de 2017, donde específicamente se pregunta sobre el tema de Ecuaciones Diferenciales.

Luego se detallan los resultados de las encuestas realizadas a los alumnos que promocionaron la asignatura y que hoy en día se encuentran cursando segundo, tercero, cuarto ó el quinto año de alguna de las carreras de ingeniería en la Facultad, donde responden acerca de la implementación del software Maple.

Por último se mostrarán las resoluciones de los ejercicios realizados por los alumnos auxiliares tanto en forma manual, como con el software Maple. También las respuestas brindadas por los mismos acerca de la experiencia.

3.1 Encuesta a alumnos que promocionaron AMII en el 2do Cuatrimestre de 2017

La encuesta se realizó a 45 alumnos que promocionaron la asignatura en el 2do cuatrimestre de 2017, actualmente están cursando materias de segundo año de alguna carrera de ingeniería de la Facultad.

Los alumnos que cursan AMII tienen como requisito aprobar tres instancias de cuatro, donde se evalúa el manejo del software Maple.

Con respecto a la primera pregunta ¿Resolviste el Trabajo Práctico de Ecuaciones Diferenciales utilizando Maple? respondieron 26 alumnos de forma afirmativa y 19 alumnos en forma negativa.

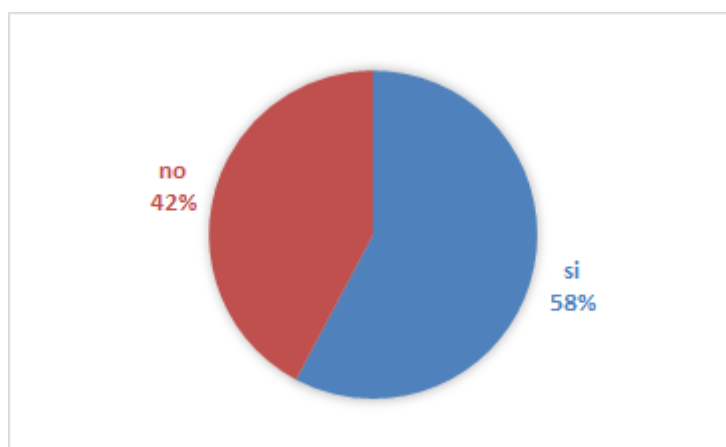


Figura 2. Porcentaje de alumnos que utilizaron el software para el TP N°12.

Fuente: elaboración propia

Para la segunda pregunta: Si la respuesta es sí, comparando el tiempo empleado en la resolución sin el empleo del software y usándolo podrías afirmar que:

Tabla 1. Respuestas con respecto al tiempo empleado con el software Maple en comparación con los elementos habituales.

Respuestas	Cantidad
con Maple más simple y breve	24
con Maple similar en tiempo y complejidad	2
sin Maple más simple y breve	0

Fuente: elaboración propia

24 alumnos contestaron que la resolución es más simple y breve, mientras que 2 alumnos aseguran que con Maple la resolución es similar en tiempo y complejidad.

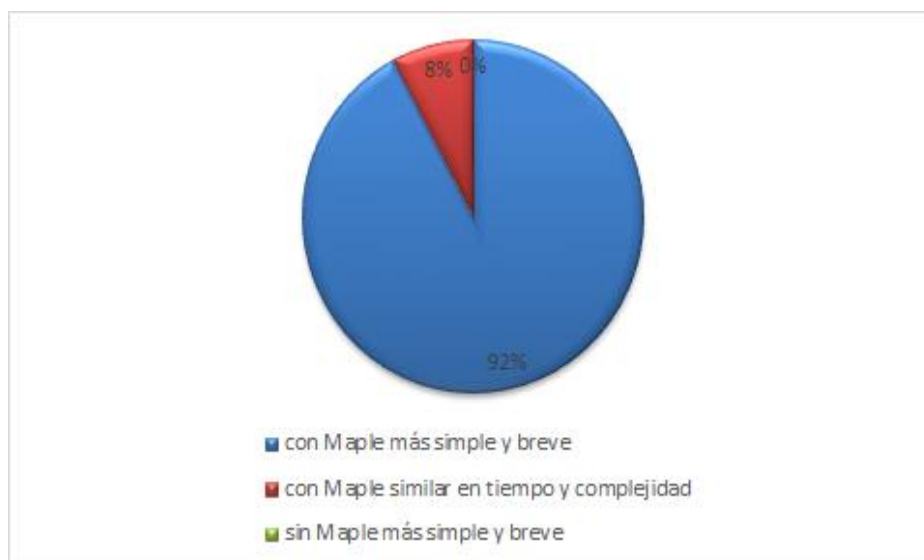


Figura 3. Muestra el porcentaje de respuestas con respecto al tiempo empleado con el software Maple en comparación con los elementos habituales.

En la Figura 3., porcentaje podemos observar que un 92 % de los alumnos que utilizaron el software Maple consideran que la resolución con el mismo es más simple y breve.

Con respecto a la tercera pregunta, ¿Podrías señalar qué ventajas consideras que aporta el uso de Maple? las respuestas obtenidas fueron:

Un 64% de los alumnos encuestados aseguran que una de las ventajas del uso del software es que ahorra tiempo de cálculo, un 51% que permite realizar múltiples tareas, un 46% que facilita la interpretación de problemas y gráficos y por último un 16% que permite intercambiar comandos y diseñar distintas estrategias.

3.2 Resultados de encuestas realizadas a alumnos de diferentes años

Se realizó una encuesta a los alumnos que cursan diferentes años de las carreras de ingeniería en la Facultad, en donde se indaga acerca de si están de acuerdo o no con la implementación del Maple.

Un total de 110 alumnos respondieron las encuestas, cabe aclarar que 5 de ellos no están de acuerdo con el uso del software, de estos alumnos 3 declaran no haberlo utilizado.

De los encuestados hay 36 alumnos que están cursando materias de segundo y tercer año y que respondieron afirmativamente. Al justificar por qué están de acuerdo respondieron:

- Es un software útil y de uso sencillo
- Sirve para resolver ejercicios con mayor facilidad
- Realiza gráficas que sirven para interpretar problemas
- Facilita la resolución de operaciones complejas
- Porque en la actualidad el uso de programas te da ventajas.
- Ahorra tiempo a la hora de resolver Trabajos Prácticos

Los encuestados que están cursando materias solamente de tercer año son 10 alumnos todos respondieron que están de acuerdo en que se implemente el software Maple. Las justificaciones se detallan a continuación:

- Es útil en cuanto a la resolución de problemas
- Visualización de gráficas
- Herramienta que no solo sirve para AMII
- Ahorra tiempo
- Herramienta Productiva si se usa de manera consciente
- Para la resolución de integrales y ecuaciones diferenciales

Uno de los encuestados declara que cuesta aprenderlo.

De los alumnos que cursan el cuarto año de alguna carrera de ingeniería, cuando se le pregunta si están de acuerdo con la implementación del software responden 49 alumnos en forma afirmativa, por las siguientes razones:

- Buena herramienta de estudio
- Resuelve problemas de manera rápida
- Visualización de gráficas
- Ahorra tiempo
- Es una herramienta útil
- Sirve para la comprensión de temas
- Es necesario el uso de la computadora para el cursado de ingeniería

Los 11 alumnos que cursan materias de cuarto y quinto año que están de acuerdo con la implementación del software Maple consideran que:

- Puede contribuir el uso a una mejora en el aprendizaje
- Brinda a los ingenieros una herramienta para el desarrollo profesional
- Se accede a un nuevo conocimiento.
- Es útil para el transcurso de la carrera
- Fácil de aprender y utilizar
- Permite ahorro de tiempo
- Facilita la verificación de resultados

3.3 Resultados de la guía presentada a los alumnos y encuesta

A continuación se muestran algunas de las resoluciones de las ecuaciones diferenciales propuestas a los auxiliares de segunda.

Handwritten mathematical solutions for differential equations. The work is divided into two parts, labeled 1) and 2).

1) $y'''' - 2y''' - 5y'' + 6y' = 0$ (marked with a circled 1)

Characteristic equation: $\lambda^4 - 2\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0 \Rightarrow (\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-1) = 0$

Roots: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$

Fundamental system: $y_1 = e^{-2x}, y_2 = e^{3x}, y_3 = e^x$

General solution: $y_c = y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^x$

2) $y'''' - 2y''' - 5y'' + 6y' = \sin x$

Homogeneous solution: $y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^x$

Particular solution: $y_p = C_4(x) e^{-2x} + C_5(x) e^{3x} + C_6(x) e^x$

System of equations for coefficients:

$$\begin{cases} C_1' e^{-2x} + C_2' e^{3x} + C_3' e^x = 0 \\ -2C_1' e^{-2x} + 3C_2' e^{3x} + C_3' e^x = 0 \\ 4C_1' e^{-2x} + 9C_2' e^{3x} + C_3' e^x = \sin x \end{cases}$$

Determinant $\Delta = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{3x} & e^x \\ -2e^{-2x} & 3e^{3x} & e^x \\ 4e^{-2x} & 9e^{3x} & e^x \end{vmatrix} = (3e^{2x} - 15e^{2x} + 4e^{2x}) - (12 + 4 - 2)e^{2x} = -30e^{2x} \neq 0$

Coefficient $C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{3x} & e^x \\ 0 & 3e^{3x} & e^x \\ \sin x & 9e^{3x} & e^x \end{vmatrix}}{-30e^{2x}} = \frac{\sin x (2e^{7x})}{-30e^{2x}} = \frac{1}{15} e^{5x} \sin x \Rightarrow C_1(x) = \frac{1}{15} \int e^{5x} \sin x dx$

Figura 4. Resolución de los ejercicios propuestos por parte de un auxiliar.

Fuente: Resultados obtenidos.

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 & e^x \\ -2e^{-2x} & 0 & e^x \\ 4e^{-2x} & \sin x & e^x \\ -30e^{2x} & & \end{vmatrix}}{-30e^{2x}} = \frac{-\sin x (3e^{-x})}{-30e^{2x}} = \frac{1}{10} e^{-2x} \sin x \Rightarrow C_2(x) = \int \frac{1}{10} e^{-2x} \sin x dx$$

$$C_3 = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{3x} & 0 \\ -2e^{-2x} & 3e^{3x} & 0 \\ 4e^{-2x} & 9e^{3x} & \sin x \\ -30e^{2x} & & \end{vmatrix}}{-30e^{2x}} = \frac{\sin x (5e^x)}{-30e^{2x}} = -\frac{1}{6} e^{-x} \sin x \Rightarrow C_3(x) = -\int \frac{1}{6} e^{-x} \sin x dx$$

Figura 4. Continuación de la resolución.
Fuente: Resultados obtenidos.

En general los alumnos auxiliares de segunda categoría de la cátedra, resuelven en un tiempo breve la ecuación homogénea, pero ya, en la resolución de la no homogénea al tener un sistema con tres incógnitas, llegan a una integral de resolución compleja que dejan planteada y sólo la resuelven posteriormente a través del uso del Maple.

Con respecto al ejercicio 2, también se presenta en el ejercicio 3, vemos que al no estar resueltas las funciones C1, C2, C3 tampoco arriban a la determinación de la solución a partir de las condiciones iniciales.

```

> E1 := solve((y''-2*y'-5*y'+6*y=0), y(x))
E1 := {y(x) = _C1 e^3 x + _C2 e^x + _C3 e^-2 x}

> E2 := solve((y''-2*y'-5*y'+6*y= sin(x)), y(x))
E2 := {y(x) = 3/50 cos(x) + 2/25 sin(x) + _C1 e^x + _C2 e^-2 x + _C3 e^3 x}

> E3 := solve((y''-2*y'-5*y'+6*y= sec(2 x)), y(x))
E3 := {y(x) = - (1/6 sec(2 x) e^-x dx) e^x + (1/15 sec(2 x) e^2 x dx) e^-2 x + (1/10 sec(2 x) e^-3 x dx) e^3 x + _C1 e^x + _C2 e^-2 x + _C3 e^3 x}

> E4 := solve((y''-2*y'-5*y'+6*y= exp(3 x)), y(x))
E4 := {y(x) = 1/10 x e^3 x + _C1 e^x + _C2 e^-2 x + _C3 e^3 x}

> E11 := solve((y''-2*y'-5*y'+6*y=0, y(0)=0, y'(0)=1, y''(0)=-1), y(x))
E11 := y(x) = 1/3 e^x - 1/3 e^-2 x

> E22 := solve((y''-2*y'-5*y'+6*y= sin(x), y(0)=0, y'(0)=1, y''(0)=-1), y(x))
E22 := y(x) = 3/50 cos(x) + 2/25 sin(x) + 1/4 e^x - 8/25 e^-2 x + 1/100 e^3 x

> E33 := solve((y''-2*y'-5*y'+6*y= sec(2 x), y(0)=0, y'(0)=1, y''(0)=-1), y(x))
E33 := y(x) = - (int(1/6 sec(2 _z1) e^-z1 d_z1) e^x + (int(1/15 sec(2 _z1) e^2 z1 d_z1) e^-2 x + (int(1/10 sec(2 _z1) e^-3 z1 d_z1) e^3 x + 1/3 e^x - 1/3 e^-2 x

> E44 := solve((y''-2*y'-5*y'+6*y= exp(3 x), y(0)=0, y'(0)=1, y''(0)=-1), y(x))
E44 := y(x) = 1/10 x e^3 x + 5/12 e^x - 26/75 e^-2 x - 7/100 e^3 x

> plot([1/3 e^x - 1/3 e^-2 x, 3/50 cos(x) + 2/25 sin(x) + 1/4 e^x - 8/25 e^-2 x + 1/100 e^3 x, 1/10 x e^3 x + 5/12 e^x - 26/75 e^-2 x - 7/100 e^3 x], x=0..2, color=[red, blue, green])
    
```

Figura 5. Resolución de los ejercicios propuestos con Maple.
Fuente: Resultados obtenidos.

Tampoco procede ninguno de los tres auxiliares en el tiempo estipulado a realizar las gráficas solicitadas, razón por la cual no llegan a conclusiones sobre su comparación, esto es observado por ellos mismos alumnos cuando expresan sus comentarios en la encuesta.

En la resolución con el software, se observa que todos los auxiliares lograron realizar los ejercicios propuestos en pocos pasos y de manera completa incluso determinando el valor de las constantes a través de las condiciones iniciales en un tiempo sumamente breve. Mostramos como ejemplo en la Figura 5 y Figura 6, uno de los desarrollos presentados.

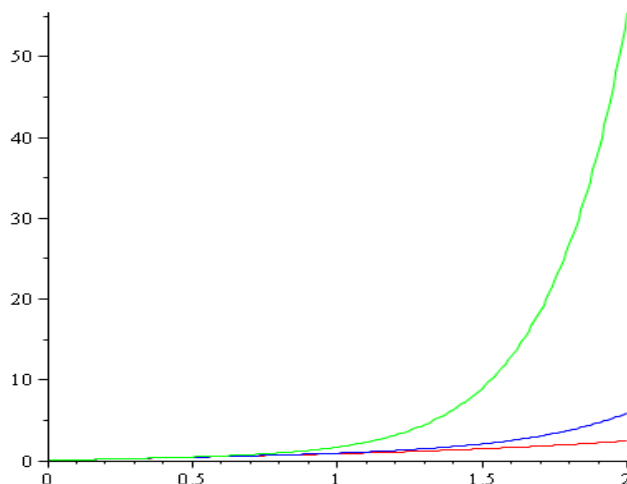


Figura 6. Gráficas de las soluciones con Maple.

Fuente: Resultados obtenidos.

Con respecto a la encuesta respondida por los auxiliares docentes, cuando se refieren a la realización de los ejercicios en forma tradicional aseguran que les llevó el doble de tiempo y más, que utilizando Maple y que incluso algunos ejercicios no pudieron ser resueltos.

Al ser indagados sobre la utilidad de maple y la intención de su implementación, expresaron:

- Que Maple resulta de utilidad para interpretar problemas y visualizar gráficas difíciles de obtener, y que les permite resolver ejercicios más complejos ahorrando tiempo de resolución.
- Los tres auxiliares adscriptos coinciden en que están de acuerdo con la implementación del software Maple incluso si sólo sirviera para ahorrar tiempo y sugieren que se dé el tema de gráfica de curvas como intersección de superficies a partir de éste software ya que los alumnos tienen especial dificultad en la visualización de éstas.
- También consideran que les permite controlar resultados y de éste modo hacer una autocorrección.

4. Conclusiones y recomendaciones

Conclusiones sobre las encuestas a los alumnos

No todos los alumnos usan el software ya que éste no es de uso obligatorio para la presentación del práctico pero si es evaluado mediante una prueba de PC. Algunos alumnos, por consultas no formalizadas en la encuesta, refieren que por razones de tiempo no se dedican a indagar sobre la resolución con Maple, ya que la cátedra sólo provee los comandos necesarios en la plataforma moodle pero ellos deben trabajar en cada ejercicio en particular, y luego sólo estudian para la prueba de máquina.

La mayor parte de los que usan el software, para la resolución del práctico, reconocen como principal ventaja el ahorro en el tiempo de cálculo, siendo menos los que observan la posibilidad que ofrece en cuanto a la interpretación de problemas y gráficos (situación que será contemplada por la cátedra para futuras intervenciones sobre la práctica).

Finalmente sólo siete de los alumnos encuestados van más allá de lo propuesto, descubren y utilizan nuevos comandos del software creando estrategias variadas de cálculo, que no solamente queremos incentivar sino que también permite la reflexión y corrección de nuestro trabajo docente.

Conclusiones sobre las encuestas a los auxiliares de segunda categoría (estudiantes de cursos superiores)

En atención a la segunda observación de los ayudantes (que maple sea parte de las clases prácticas), se prevé para el siguiente cuatrimestre un taller sobre distintos comandos de maple por cada práctico favoreciendo el desarrollo de nuevas metodologías didácticas a incorporarse a las clases prácticas.

Los alumnos auxiliares de segunda categoría que poseen conocimientos afianzados del tema pudieron resolver los ejercicios en forma incompleta en el tiempo estipulado utilizando recursos tradicionales, pero cuando lo hicieron a través del software, todos ellos completaron la actividad en un tiempo mucho menor, por lo que se observa que la utilización del software permite ahorrar tiempo y a la vez verificar los resultados obtenidos.

Este ahorro de tiempo que era anteriormente destinado a la fase operacional, permitiría llegar a realizar el análisis de la influencia de los distintos términos a través de las condiciones de valor inicial y sus respectivas gráficas como así también la existencia y unicidad de la solución. La resolución con el software Maple permitiría analizar por ejemplo que sucede si el término independiente no fuera una función continua en todo su dominio (condiciones del teorema de existencia y unicidad), en lugar de reducir la intervención sobre el problema al cálculo de la solución.

5. Referencias

- [1] ALVAREZ FLORES, E.P. Y OTROS (2017). *Adquisición y carencia académica de competencias tecnológicas ante una economía digital*. RLCS, Revista Latina de Comunicación Social, 72 – Páginas 540 a 559 [Investigación][Financiada] DOI: 10.4185/RLCS, 72-2017-1178 | ISSN 1138-5820 | Año 2017. (<http://www.revistalatinacs.org/072paper/1178/RLCS-paper1178.pdf>)
- [2] ALMAZAN, J.F., Y OTROS (2004). *El uso de la Computadora como complemento de la Enseñanza en Análisis II*; IV Congreso Argentino de la Enseñanza de la Ingeniería, Buenos Aires.

- [3] CORRAL, Y. (2010). *Diseño de cuestionarios para recolección de datos*- <http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/n36/art08.pdf>
- [4] CUICAS AVILA, M., Y OTROS (2007). *El software matemático como herramienta para el desarrollo de habilidades del pensamiento y mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas*. Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación" E-ISSN: 1409-4703. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44770209>