TRANSFORMACIONES LINEALES EN EL PLANO CON APOYO DEL GEOGEBRA

Mg. Florencia Alurralde, Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta (CIUNSa), Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta (U.N.Sa), florencialurralde@gmail.com

Ignacio Ruiz Collivadino, Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta (CIUNSa), Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta (U.N.Sa), ignaciogd_89@hotmail.com

Resumen— Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación del Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Salta (CIUNSA), cuyo objetivo es el uso de las Tic, en particular del software de geometría dinámica Geogebra, como herramienta complementaria al papel y lápiz en la enseñanza de la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica (ALGA), correspondiente al primer año de las carreras de Ingeniería. Reflexionando acerca de las dificultades de los estudiantes que ingresan a las carreras de ingeniería en la comprensión del tema Transformaciones Lineales y su interpretación geométrica, surge la necesidad de aportar como docentes, cambios en las estrategias de enseñanza que apunten a mejorar las condiciones para un aprendizaje significativo, desarrollando capacidades de creatividad, exploración, verificación y autoevaluación. El Geogebra presenta grandes ventajas: es gratuito, de manejo sencillo y permite realizar gráficas de manera similar al trabajo usual en las clases de la asignatura. Además existen versiones para el celular, lo que posibilita su uso a la casi totalidad de los alumnos. En particular en la asignatura se desarrolla el tema Transformaciones Lineales; lo que en general resulta complicado para el estudiante y gracias a la incorporación del Geogebra en su tratamiento, se facilitó su interpretación geométrica logrando una mejora en el aprendizaje, lo que se vio reflejado en el resultado de las evaluaciones de la asignatura.

Palabras clave— *transformación lineal, geogebra, plano*.

1. Introducción

Dando continuidad a la línea de investigación iniciada en el Proyecto de Investigación del CIUNSa, sobre la incorporación de las TIC en la enseñanza y aprendizaje del álgebra y la geometría, se realizó una experiencia, con ayuda del Soft de geometría dinámica: Geogebra, sobre el tema Aplicaciones Lineales con estudiantes de primer año de ingeniería, que cursan la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica (ALGA), en las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ingeniería de la U.N.Sa.

Según Ramírez Toledo[1], en la enseñanza constructivista el aprendizaje humano es una construcción interior, aunque el docente realice una clase magistral, ésta no puede ser significativa si sus conceptos no encajan en los conceptos previos de los alumnos El autor menciona entre los requerimientos necesarios para potenciar la enseñanza constructivista, el propiciar las condiciones para que el estudiante participe en la planeación, selección de las actividades, las consultas de fuentes de información, etc. En este sentido Sánchez Rosal [2] recomienda una paulatina incorporación de los recursos tecnológicos como complemento de la enseñanza tradicional en el ámbito universitario y pone énfasis en la importancia de los

procesos de visualización, que permite la asimilación de conceptos abstractos en base de imágenes o representaciones que las TIC proporcionan. Orozco Rodríguez [3] manifiesta que usar GeoGebra puede generar un entorno más adecuado para la exploración activa de estructuras matemáticas a través de múltiples representaciones, o para mostrar a los estudiantes algunas situaciones de las matemáticas que no son posibles con el lápiz y el papel.
De la experiencia como docentes de álgebra, se observa que la interpretación geométrica de las transformaciones lineales, en general es difícil de ver para el alumno, por lo que se intenta a través del uso del Geogebra facilitar la visualización y comprensión del tema, con el fin de contribuir al logro de un aprendizaje significativo.
En el presente trabajo se relata una experiencia que se llevó a cabo en horario extra clase de la asignatura, en la que trabajaron conjuntamente el docente de la comisión de práctica y los 52 alumnos.

2. Metodología y Desarrollo

La experiencia se enfocó sobre ejercicios de transformaciones lineales en el plano: proyecciones y reflexiones sobre los ejes coordenados y sobre rectas en el plano, rotaciones de vectores y de curvas en el plano. Se trabajó en una clase extra (de 2,5 horas) a las tres clases usuales destinadas en la asignatura ALGA para el tratamiento del tema. Se inició recordando definiciones, propiedades de los diferentes transformaciones, representación matricial de una aplicación lineal y resolución de algunos ejercicios del trabajo práctico de la asignatura con la ayuda del Geogebra como tarea previa. Luego se trabajó en la resolución de problemas adicionales que se transcriben a continuación:

<u>Guía de actividades</u>
Dadas las matrices cuadradas de orden 2, asociadas a una transformación lineal:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}{}^{1}\!/_{5}&{}^{2}\!/_{5}\\{}^{2}\!/_{5}&{}^{4}\!/_{5}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}-{}^{4}\!/_{5}&-{}^{3}\!/_{5}\\-{}^{3}\!/_{5}&{}^{4}\!/_{5}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}{}^{3}\!/_{5}&{}^{4}\!/_{5}\\-{}^{4}\!/_{5}&{}^{3}\!/_{5}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{-1}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\mathbf{4}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{3}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}\mathbf{4}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{3}\end{pmatrix}$$

<u>Ejercicio N°1</u>
Dado el triángulo formado por los puntos $P=(1,3)$, $Q=(2,5)$ y $R=(6,4)$.

a) Grafique los puntos.
b) Encuentre los transformados de estos puntos utilizando las matrices A, B, C y D. Grafique.
c) ¿Qué tipo de transformaciones representan las analizadas en el inciso anterior?
d) Verifique el inciso anterior mostrando que A y B son idempotentes y que C y D son involutivas.

<u>Ejercicio N°2</u>
Las matrices E y F representan transformaciones de proyección y simetría sobre dos rectas distintas respectivamente. Utilizando Geogebra, encuentre las ecuaciones de las dos rectas. Sugerencia: tome los puntos P, Q y R dados en el ejercicio anterior y transfórmelos para observar cómo son los transformados de estos puntos.

<u>Ejercicio N°3</u>

Las matrices G y H representan transformaciones de rotación. Utilizando Geogebra encuentre el ángulo de rotación asociada a cada una.

Ejercicio Nº4

Dada una circunferencia centrada en el origen y de radio 1:

a) Determine analíticamente qué efecto tienen las transformaciones asociadas a las matrices I, J, K y L en los puntos de la circunferencia.
b) Verifique mediante el uso de Geogebra cómo se deforma la circunferencia al transformar sus puntos con las transformaciones de las matrices mencionadas.

Todos los estudiantes poseían PC o teléfono celular en el que disponían de la última versión del soft Geogebra. El docente con la ayuda del proyector, guió a los estudiantes con las dudas que surgían en el desarrollo de cada ítem y antes de finalizar la clase se hizo una puesta en común de los resultados obtenidos por los alumnos, que fueron grabados en pendrive y luego proyectados a todo el grupo y sobre los cuales el docente hizo algunas aclaraciones y completó con posibles variaciones de los valores de la matriz de transformación, con el fin de ampliar la visualización del tema.
A modo de ejemplo se muestra el desarrollo de uno de los problemas propuestos que trabajaron los estudiantes y luego se proyectó:

Desarrollo Ejercicio Nº4

Se considerará el efecto que produce cada una de las cuatro matrices por separado, de modo analítico y mostrando también capturas de pantalla del trabajo realizado con Geogebra.

Dado la ecuación de la circunferencia de radio 1 y centro en el origen:

$$x^2 + y^2 = 1 \ (0)$$

Para la matriz I:
La transformación asociada a esta matriz es:

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ (1)$$

La cual puede expresarse como:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ (2)$$

La ecuación (2) a su vez puede expresarse como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \ (3)$$

A partir de lo cual obtenemos que:

$$\begin{matrix} x = x' \\ y = y' \end{matrix} \ (4)$$

El planteo de todas estas ecuaciones parecería trivial e innecesario, pero servirá como base para encontrar la deformación de la circunferencia en relación a las transformaciones asociadas a las otras matrices.

Reemplazando lo obtenido en (4) en la ecuación (0) obtenemos:

$$x'^2 + y'^2 = 1 \ (5)$$

Se puede observar claramente que lo que se obtuvo continúa siendo una circunferencia de radio 1. Esto tenía que suceder ya que la trasformación elegida no es otra que la identidad.

Para la matriz J:
La transformación asociada a esta matriz es:

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ (6)$$

La cual puede expresarse como:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ (7)$$

El determinante de la matriz J es igual a 4 entonces la matriz admite inversa. Premultiplicando miembro a miembro por la inversa de J obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \ (8)$$

Dado que la matriz J es una matriz diagonal su inversa resulta:

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ (9)$$

Reemplazando (9) en (8) obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \ (10)$$

Por último, las variables x e y en función de x’ e y’ resultan para este caso:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}x' \\ y &= y' \end{aligned} \ (11)$$

Y reemplazando la ecuación (11) en (0):

$$\left(\frac{1}{4}x'\right)^2 + y'^2 = 1 \ (12)$$

$$\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{1} = 1 \ (13)$$

Se observa que esta última ecuación ya no representa la ecuación de una circunferencia, sino la ecuación de una elipse horizontal cuyos semiejes mayor y menor son iguales a 4 y a 1 respectivamente. Estos dos valores para los semiejes no son una coincidencia, ambos son las entradas de la diagonal de la matriz J. Lo que hace esta transformación es cuadriplicar la abscisa del punto manteniendo constante su ordenada. Mostramos a continuación el trabajo gráfico realizado con Geogebra.

Lo primero que hacemos es ingresar la circunferencia para luego marcar un punto en ella como se muestra en la figura 1.

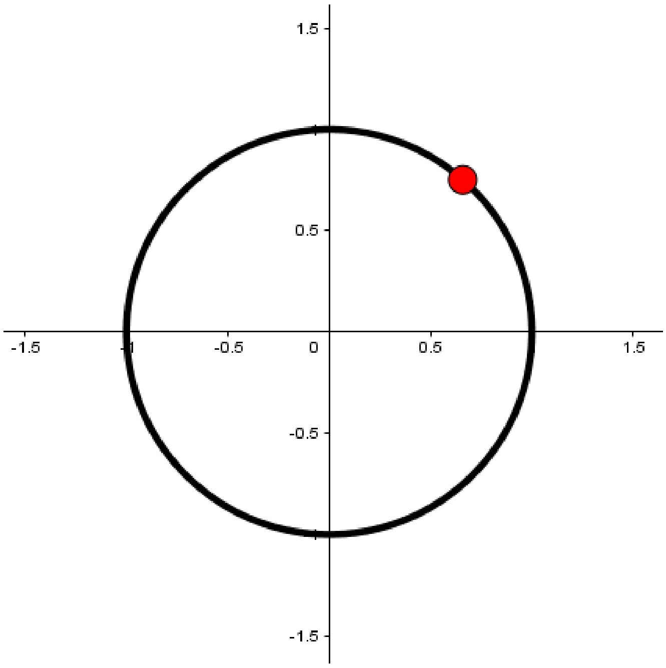

Figura 1

Luego se multiplica este punto por la matriz J. Para generar la matriz la introducimos en la vista “hoja de cálculo” de Geogebra. Se obtiene:

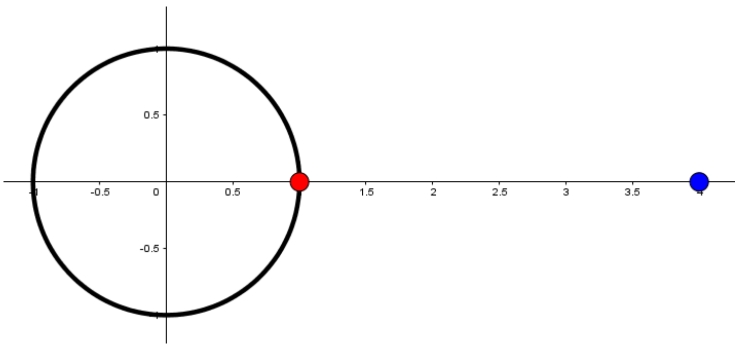

Figura 2

En la figura 2 tenemos un punto rojo (en la circunferencia) de coordenadas (1,0) y un punto azul (el transformado del punto rojo) de coordenadas (4,0). Mostramos con esta figura que la transformación cuadruplica la abscisa de cada punto.

Activando el rastro del punto azul y moviendo el punto rojo a través de toda la circunferencia se observará la transformación de cada punto de la misma:

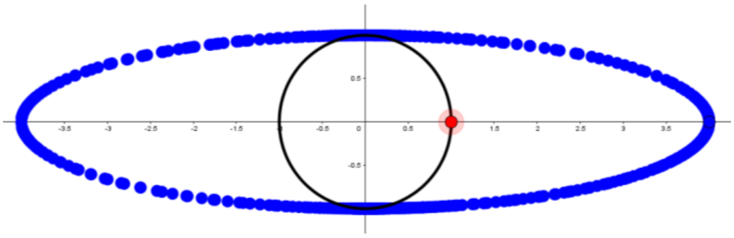

Figura 3

Por último, ingresamos en el programa la ecuación de la elipse (13) para verificar que este rastro obtenido es efectivamente la elipse calculada analíticamente.

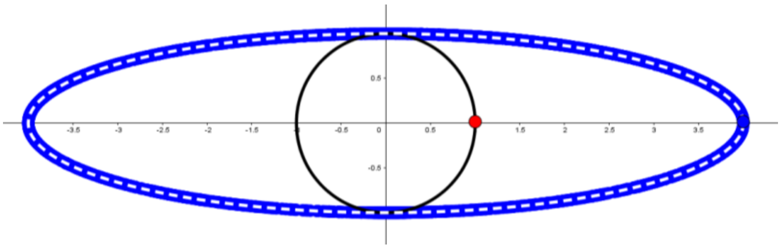

Figura 4

En la figura 4 se graficó (en líneas de puntos) la ecuación de la elipse (13) y, cómo se observa, coincide totalmente con el trazo obtenido en la figura 3.

Con este primer ejemplo lo que mostramos es que, por un lado, se puede ir obteniendo punto a punto la transformación de los puntos de la circunferencia (figura 3) y, por otro, se puede obtener (figura 4) la ecuación del lugar geométrico una vez que se lo trabaja analíticamente en lápiz y papel.

Para la matriz K:
Repetimos el mismo procedimiento efectuado para la matriz J ya que ambas son matrices diagonales.
La transformación asociada a esta matriz es:

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (14)$$

La cual puede expresarse como:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (15)$$

El determinante de la matriz K es igual a 3, entonces la matriz, admite inversa. Premultiplicando miembro a miembro por la inversa de K obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = K^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (16)$$

Dado que la matriz K es una matriz diagonal su inversa resulta:

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \ (17)$$

Reemplazando (16) en (17) obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \ (18)$$

Por último, las variables x e y en función de x’ e y’ resultan para este caso:

$$\begin{aligned} x &= x' \\ y &= \frac{1}{3} y' \end{aligned} \ (19)$$

Y reemplazando la ecuación (19) en (0):

$$x'^2 + \left(\frac{1}{3} y'\right)^2 = 1 \ (20)$$

$$\frac{x'^2}{1} + \frac{y'^2}{9} = 1 \ (21)$$

En este caso, a diferencia del anterior, se obtuvo una elipse vertical de semiejes mayor y menor iguales a 3 y 1 respectivamente. No mostramos capturas de pantalla en este caso ya que conceptualmente es igual al caso anterior solo que la deformación se produce en el eje de las ordenadas.

Para la matriz L:
Realizamos un procedimiento familiar al efectuado en los dos casos anteriores, ya que esta matriz no es diagonal y el trabajo algebraico resulta un poco más complejo.
La transformación asociada a esta matriz es:

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ (22)$$

La cual puede expresarse como:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ (23)$$

El determinante de la matriz L es igual a 11, entonces la matriz admite inversa. Premultiplicando miembro a miembro por la inversa de L obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \ (24)$$

Calculamos la inversa de la matriz L utilizando el método de la matriz adjunta.

$$\begin{matrix} c_{11} = 3 & c_{12} = -1 \\ c_{21} = -1 & c_{22} = 4 \end{matrix} \ (25)$$

Con los valores obtenidos en (25) armamos la matriz de cofactores y adjunta de L.

$$Cof(L) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \ (26)$$

$$Adj(L) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \ (27)$$

La inversa de la matriz L resulta:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} {}^{3}/_{11} & -{}^{1}/_{11} \\ -{}^{1}/_{11} & {}^{4}/_{11} \end{pmatrix} \ (28)$$

Reemplazando (28) en (24) obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{3}/_{11} & -{}^{1}/_{11} \\ -{}^{1}/_{11} & {}^{4}/_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \ (29)$$

Por último, las variables x e y en función de x' e y' resultan para este caso:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{11}x' - \frac{1}{11}y' \\ y &= -\frac{1}{11}x' + \frac{4}{11}y' \end{aligned} \ (30)$$

El último paso no quedará tan sencillo como en los casos anteriores. Reemplazando (30) en (0) y operando algebraicamente.

$$\left(\frac{3}{11}x' - \frac{1}{11}y'\right)^2 + \left(-\frac{1}{11}x' + \frac{4}{11}y'\right)^2 = 1 \ (31)$$

$$\frac{9}{121}x'^2 - \frac{6}{121}x'y' + \frac{1}{121}y'^2 + \frac{1}{121}x'^2 - \frac{8}{121}x'y' + \frac{16}{121}y'^2 = 1 \ (32)$$

Multiplicando miembro a miembro la ecuación (32) por 121 y reagrupando:

$$10x'^2 - 14x'y' + 17y'^2 - 121 = 0 \ (33)$$

Los alumnos analizaron analíticamente que la ecuación (33) representa una elipse rotada. Se hará el mismo análisis gráfico que se hizo para la matriz J.

La primera parte es exactamente la misma. Se ingresa la circunferencia (0) y se marca un punto en ella como se mostró en la figura 1.

Luego se multiplica este punto con la matriz L. Moviendo el punto rojo a través de la circunferencia obtenemos todos sus transformados vistos en la figura 5 en el rastro en azul.

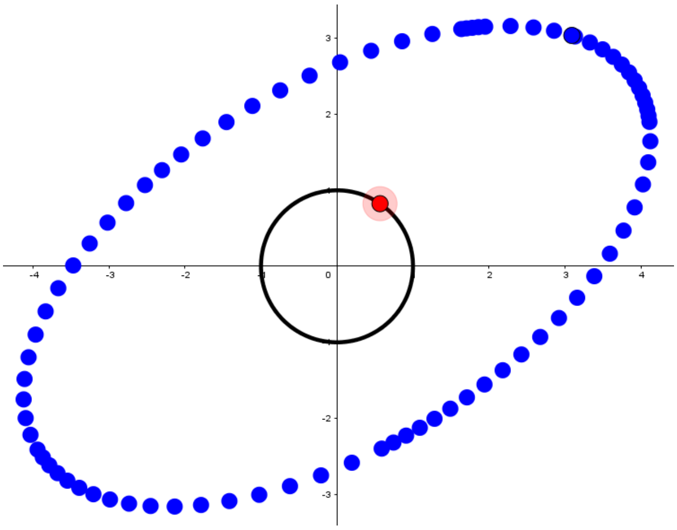

Figura 5

Al igual que en el caso anterior, introdujimos en Geogebra la ecuación de la elipse rotada (33) obtenida analíticamente, para verificar que coincide con el rastro marcado, tal como se observa en la figura 6 donde la elipse esta dibujada en línea de puntos.

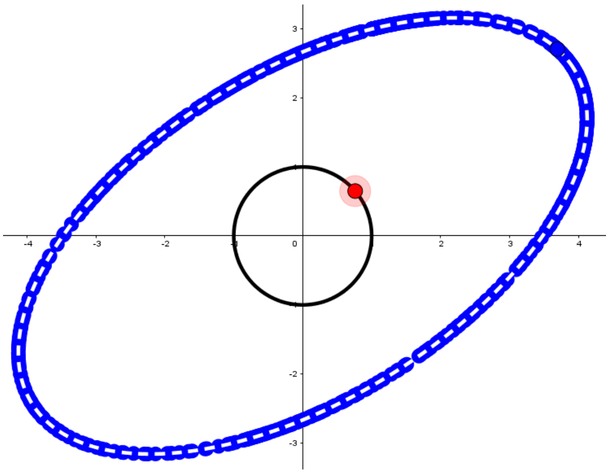

Figura 6

Finalizada la clase se solicitó a los estudiantes que emitieran sus opiniones acerca de la forma de trabajo con apoyo del geogebra, en cuanto a lo positivo, negativo y sugerencias.

3. Resultados

El 95% de ellos indicó como muy positiva la experiencia. Del 5% restante, el 1% no respondió, y el 4% indicó que le pareció regular porque no conocían bien el manejo básico del soft, entonces no podían seguir el ritmo de la clase.
Entre las justificaciones más frecuentes de los estudiantes, a su respuesta positiva acerca de la experiencia, figuran:
- Poder visualizar los cambios que provoca una transformación en el plano a través del Geogebra permite entender mucho mejor el tema de Transformaciones lineales, por ejemplo se puede observar cuáles aplicaciones mantienen la forma y cuáles no. (92%).

- El soft me permitió visualizar el tema desde diferentes ángulos, lo que no puedo hacer en el papel (86%).
- La clase es más divertida y ágil (79%).
- Pude verificar todos los resultados de los ejercicios del práctico, que había realizado con lápiz y papel (70%).
- Como sugerencia proponen otra clase adicional sobre el mismo tema para poder jugar un poco más con la variación de las matrices de una transformación para observar con más detenimiento el efecto causado en las gráficas, ya que el tiempo fue escaso.

En la evaluación que se hace en la asignatura ALGA sobre cada unidad, se observó que la nota promedio obtenida por los estudiantes que realizaron la experiencia en la evaluación de transformaciones lineales fue de 85 sobre un total de 100 puntos. Comparando con el resto de los estudiantes de la asignatura (nota promedio 68 sobre 100 ptos.) se observa una mejora de 27 puntos, y teniendo en cuenta el promedio de notas obtenidas en las evaluaciones del tema de la asignatura en los tres últimos años (72 sobre 100 ptos.) se observa que se supera en 13 puntos.

4. Conclusiones

Teniendo en cuenta el 5% que no respondió positivamente y que manifestaron que debido a la falta de manejo con fluidez el Geogebra perdieron mucho tiempo en relación a los compañeros, se propondrá dictar un curso de manejo básico del soft Geogebra antes del inicio del cursado.
Quedó claro que la mayoría de los estudiantes se incentivaron con la clase experimental y manifestaron interés en seguir con otra clase del tema para ver más ejemplos, por lo que se tendrá en cuenta dedicar un tiempo mayor a este tipo de clases adicionales.
De acuerdo a los resultados obtenidos en las evaluaciones y la opinión de los estudiantes, se podría decir que se cumplió en parte con el objetivo planteado: intentar que los estudiantes interpreten mejor las transformaciones lineales, integrando el álgebra lineal con la geometría analítica, lo que consideramos como un aporte al aprendizaje significativo del tema.
Se seguirá trabajando con esta metodología en la asignatura, intentando incorporar el Geogebra en las horas de clases usuales en todos los temas de la asignatura.

5. Referencias Bibliográficas

[1] RAMIREZ TOLEDO, A. (2012). El Constructivismo Pedagógico. Recuperado de: http://ww2.educarchile.cl/UserFiles/P0001/File/El%Constructivismo/%20Pedag%C3%B3gico.pdf.

[2] SANCHEZ ROSAL, A. (2012). Incorporación de las TIC en el aprendizaje de las matemáticas en el sector universitario. *Revista de Educación Matemática, Unión Matemática Argentina*, v.27. n.3, p. 23-28.

[3] OROZCO RODRIGUEZ, C. (2017). Objetos de Aprendizaje con eXeLearning y GeoGebra para la definición y representación geométrica de operaciones con vectores y sus aplicaciones (tesis doctoral). Recuperado de: https://repositorio.grial.eu/handle/grial/772