FORTALECIMIENTO DEL PERFIL DEL INGENIERO A TRAVÉS DE LA PROFUNDIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO MEDIANTE EL ANÁLISIS Y ESTUDIO EXHAUSTIVO DE TEMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO Y SU APLICACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMPLEJOS

Sara E. De Federico, Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Rosario
Departamento Ciencias Básicas, Rosario, Argentina

Mariela A. Avogradini, Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Rosario
Departamento Ciencias Básicas, Rosario, Argentina

Resumen— El matemático británico Brook Taylor con su "cálculo de diferencias finitas" y la célebre fórmula que recibe su nombre hizo un aporte esencial a la ciencia de la matemática. Esta contribución se usa por ejemplo en la construcción de polinomios para la aproximación de funciones y su extensión a series infinitas, la aplicación para la resolución de integrales no elementales, y la estimación del error por aproximación. Este legado está ampliamente extendido, e incluido en software de cálculo simbólico, de diseño, de control y simulación. A veces, el análisis y estudio de esta formulación suele relegarse y en ocasiones dejándose como práctica complementaria. Proponiendo una jerarquización y excelencia de las incumbencias profesionales de los ingenieros, se busca retomar el estudio de temas fundamentales de la Matemática, principalmente aquellos aplicados para la resolución de problemas complejos. Se crean clases taller de exposición de un tema con actividades dinámicas y personalizadas, cuyo objetivo es el perfeccionamiento de las capacidades analíticas y de modelado para la resolución de problemas. En este trabajo se muestran las herramientas de enseñanza utilizadas en clases especiales para alumnos de las carreras de ingeniería de la de la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Rosario, en donde se aborda el estudio desarrollado por Taylor, y su uso en ecuaciones características desarrollables, aplicaciones en la óptica y caminatas aleatorias.

Palabras clave— *fortalecimiento, perfil ingeniero, estudio Brook Taylor, ecuaciones no desarrollables, óptica, caminata aleatoria.*

1. Introducción

En la formación de las incumbencias del ingeniero, juega un rol fundamental un conocimiento exhaustivo de la matemática, que junto con la física son la base para el aprendizaje y creación de la estructura cognitiva del estudiante. Por ello, en las universidades se trata de proveer a los alumnos además de los formatos curriculares comunes, un conjunto de cursos y talleres de especialización en temas específicos. La búsqueda permanente se enfoca en encontrar medios que aumenten y enriquezcan al conocimiento matemático de los asistentes [1]. Es también muy importante la selección adecuada del tema que se desea exponer, escogiéndose en general los considerados más complejos de comprender por el alumnado. En el seno de los estudios de investigación realizados en la cátedra de Fundamentos de Informática del Departamento Ciencias Básicas de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Rosario, se propone añadir al cronograma de talleres, la revisión y profundización de temas específicos del cálculo, basándose en la trascendencia que poseen dentro de la ciencia. Por ejemplo, las series de Taylor se incluyen en el dictado curricular en forma rápida y somera. Pero es un tema fundamental en el cálculo, sobre todo en su uso extendido en el núcleo de los entornos informáticos especializados en matemática. Por ello se planificaron talleres de presentación del estudio cálculo de diferencias finitas realizado por Taylor, con el apoyo de simulaciones interactivas creadas en software de cálculo simbólico. En ellos, se profundiza el tema incluyendo el contexto histórico en que fue concebido, proveyéndose prácticas intensivas y estudio de las aplicaciones más interesantes y significativas. A través de esta forma de trabajo los alumnos afianzan y amplían efectivamente sus conocimientos de Matemática, y exploran nuevas ramas de aplicación del tema. En este trabajo se expone el taller organizado para el tema, comenzando con los materiales y métodos de trabajo para el dictado del taller en la sección 2, y descripción del contexto histórico en la sección 3. En la sección 4 se muestra la estructura de la exposición teórica con el apoyo de simulaciones y animaciones. En la sección 5 se muestran simulaciones y animaciones para la demostración de las aplicaciones. En la sección 6 se muestran los resultados obtenidos, y finalmente en la sección 7 se describen las conclusiones y propuestas a futuro.

2. Materiales y métodos de trabajo

La metodología utilizada en el taller engloba un conjunto de enfoques que, aplicados en forma secuencial proveen un camino en donde el conocimiento se va presentando en forma natural y es fácilmente aprendido por los alumnos. De esta forma se crea un taller que tiene varias etapas, en donde se logra abordar el tema en forma completa. Las estrategias más importantes utilizadas incluyen la clase interactiva, la enseñanza orientada a los problemas, el uso de herramientas informáticas, en este caso simulaciones y animaciones para el análisis conceptual e interpretación de comportamientos extendidos en el tiempo y con múltiples variaciones [2]. Además, se crearon conjuntos de preguntas especialmente formuladas para profundizar el razonamiento e incentivar la actitud analítica en el alumno.

Además, para brindar un curso de excelencia, se tomaron las premisas del Knowledge Quarter, donde el compromiso del docente es esencial para la transmisión del conocimiento exitoso [3]. El Knowledge Quarter identifica tres categorías de situaciones en las que el conocimiento en matemática previo de los docentes se revela en el aula. Consiste en enseñar a través de tres acciones llamadas categorías de situaciones: transformación, conexión y contingencia. En el cuarto lugar se encuentra la base, que comprende el conocimiento del contenido matemático del profesor y el conocimiento teórico de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, apoyando a cada una de estas categorías de situaciones [4].

3. Cálculo de diferencias finitas de Brook Taylor

El taller comienza con la demarcación de un contexto histórico en donde se pergeñaron los conceptos. La intención es situar al estudiante en la problemática y necesidades que llevaron a Taylor a indagar y tratar de obtener soluciones a temas inconclusos. Cabe destacar que este taller es una extensión de las clases curriculares, por lo que los conceptos básicos se recorren en una clase introductoria de repaso. Antes de ésta, se muestra la base histórica de este taller, de la que se describe en un pequeño resumen a continuación.

3.1 Series de Taylor. Contexto histórico

La llamada serie de Taylor resulta fundamental en el cálculo matemático y, con ello, en el resto de las ciencias y la ingeniería. Su autor, el inglés Brook Taylor (1685, Edmonton-1731, Londres), no es tan conocido como otros matemáticos, aunque cualquier estudiante de ingeniería u otras ciencias ha utilizado los métodos que llevan su nombre: la serie de Taylor, el polinomio de Taylor y la fórmula de Taylor. Su formación polifacética marcó una clara amplitud de miras a lo largo de su carrera. Trabajó en diversos problemas fundamentales de las artes y las ciencias: estudió el problema de la cuerda vibrante, fundamental para comprender el funcionamiento de instrumentos musicales como la guitarra o el piano; y desarrolló el llamado método de las diferencias finitas, que permite resolver ciertas ecuaciones diferenciales mediante un sencillo procedimiento de álgebra lineal; se interesó por temas de probabilidad, magnetismo, diseño de termómetros, y un largo etcétera. En 1715, publicó su tratado Linear Perspective que constituye uno de los primeros estudios formales sobre perspectiva y puntos de fuga [5].

En 1712, a los 27 años ingresó en la prestigiosa Royal Society de Londres, y, tres años más tarde, siendo secretario de esta sociedad, publicó su obra Methodus incrementorum directa et inversa, en el que presentó una de sus grandes aportaciones a las matemáticas: la ya mencionada serie de Taylor. La exposición, basada en lo que podríamos llamar diferencias finitas, no logró muchos partidarios a causa de su naturaleza aritmética cuando los británicos estaban intentando relacionar el cálculo infinitesimal con la geometría o la noción física de velocidad. El matemático francés Michel Rolle señalaba en una ocasión que el cálculo infinitesimal era una colección de falacias ingeniosas. Además, en este valioso tratado; presentaba su invento de integración por partes y se ocupaba también de la determinación de las soluciones singulares de las ecuaciones diferenciales; del problema del cambio de variable; de la determinación de los centros de oscilación, y del problema de la cuerda vibrante. En 1717, difundió un procedimiento no probado para aproximar las raíces de una ecuación, que brinda un método para obtención de logaritmos. También realizó estudios de Física sobre el fenómeno de la capilaridad. Además, sus intereses no se limitaron al quehacer matemático. Estudió leyes en Cambridge y recibió una sólida educación musical y artística. Todos los historiadores de la Ciencia coinciden que, sin las aportaciones que hizo Taylor a comienzos del siglo XVIII, el análisis matemático no habría alcanzado el auge que experimentó durante la centuria siguiente, generado por la necesidad de encontrar soluciones satisfactorias a la mayor parte de las cuestiones planteadas sobre la cuerda vibrante [6].

Casi todos los matemáticos del siglo XVIII realizaron algún esfuerzo o al menos se pronunciaron acerca de la lógica del cálculo infinitesimal. La distinción entre un número muy grande y un número infinito difícilmente se hacía; si un teorema era cierto para todo n parecía claro que también lo era para n infinito. De manera análoga, un cociente incremental se reemplazaba por la derivada y una suma de un número finito de términos difícilmente se distinguía de una integral; los matemáticos pasaban de una a otra con toda libertad. No se debe pensar que Taylor fue el único matemático que trabajaba en este tema: Newton, Leibniz, Bernouilli (1667-1748) y Moivre (1667-1754) también descubrieron variantes al teorema de Taylor. La importancia de este teorema permaneció desconocida hasta 1772, cuando Lagrange (1736-1813) expuso los principios básicos del cálculo diferencial. Pero la rigurosidad del cálculo infinitesimal no fue alcanzada hasta el siglo XIX.

3.1.1 La obtención de la Fórmula de Taylor [7]

Taylor era discípulo de Newton y tenía un gran interés en el problema del desarrollo de funciones usando otras más sencillas. Era entonces conocido que una función polinómica $f(x)$ de grado n,

$$f(x) = a_0 + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n \quad (1)$$

Se puede escribir como

$$f(a+h) = c_0 + c_1\, h + \cdots + c_n\, h^n \quad (2)$$

Para todo par de números a y h, y los coeficientes $c_{k,}\ \ 0 \leq\ k \leq n$ obedecen a la relación

$$c_k \ = \frac{1}{k!}\, f^{(k)}(a) \text{ con } 1 \leq\ k \leq n,\ c_0 = f(a) \quad (3)$$

Taylor, usando algunas ideas del “cálculo de diferencias finitas” y, persiguiendo una generalización de lo anterior, descubrió la célebre “fórmula de Taylor”:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots \qquad (4)$$

Válida bajo ciertas condiciones sobre la función f, como veremos más adelante.

Es interesante mostrar, de manera heurística, cómo se cree que llegó Taylor a tal fórmula (anunciada por él mismo en 1712).

Sea $f\,:\, R \to R$ una función y r un número positivo fijo. Se define:

$$\Delta f(x) = f(x+r) - f(x), \qquad \forall x\ \in R$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)), \qquad \forall x\ \in R$$

Y así sucesivamente. Si la variable x pasa del valor x al valor $x + nr$, para $n\ \in N$, entonces $f(x)$ pasa a valer $f(x+nr)$ y se tiene:

$$f(x+nr) = f(x) + \frac{n}{1}\Delta f(x) + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\Delta^2 f(x) + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{1\,.\,2 \ldots n}\Delta^n f(x) \quad (5)$$

Los coeficientes de $f(x)$, $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x)$ se forman de la misma manera que los coeficientes del binomio $(a+b)^n$. Dichos coeficientes son 1, $\frac{n}{1}$, $\frac{n(n-1)}{1\,.2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.2\,.3}$, …

A (5) se le conoce como Fórmula de Interpolación de Newton.

Si h es un número dado positivo, tomando n y r tales que $nr = h$, entonces r tiende a 0 cuando n tiende a infinito y, recíprocamente. Escribiendo $(*)$ de la forma:

$$\mathrm{f(x+nr) = f(x) + \frac{nr}{1}\frac{\Delta f(x)}{r} + \frac{n(n-1)r^2}{1\,.\,2}\frac{\Delta^2 f(x)}{r^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots 1 r^n}{1\,.\,2 \ldots n}\frac{\Delta^n f(x)}{r^n}}$$

Ahora según Taylor, si r tiende a cero, n tiende a infinito y:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots \quad (4)$$

De manera informal, se puede decir que la fórmula se obtuvo a partir de la fórmula de interpolación de Newton.

A continuación se muestra en forma resumida, los conceptos principales de teoría de Taylor que luego fue, y sigue siendo utilizada por gran cantidad de científicos, como por ejemplo Newton, Leibniz, Bernoulli y Euler; y son una parte fundamental del cálculo infinitesimal. A través de su aplicación se logra la única representación para ciertas funciones y el medio más eficaz para operar con las funciones trascendentes elementales. Newton obtuvo además las series de *ArcSen(x)*, *Sen(x)*, *Cos(x)* y e^x. También Leibiniz obtuvo las series de *ArcSen(x)*, *Sen(x)*, *Cos(x)* presumiblemente de un modo independiente en 1673. Taylor añadió a las matemáticas una nueva rama que ahora se la nombra "cálculo de diferencias finitas".

3.2 Conceptos fundamentales del cálculo de diferencias finitas de Taylor [8]

Por el teorema de la diferenciación término a término, sabemos que la suma de una serie de potencias es una función continua con derivadas de todos los órdenes dentro de su intervalo de convergencia. Pero ¿qué puede decirse del recíproco? Si una función *f (x)* tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo I, ¿se podrá expresar como una serie de potencias en I? Si esto es posible, ¿cuáles serán sus coeficientes? Podemos responder fácilmente la última pregunta si suponemos que f (x) es la suma de una serie de potencias.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n\,(x-a)^n + \cdots \quad (6)$$

con un radio de convergencia positivo. Al derivar repetidamente, término a término, dentro del intervalo de convergencia *I*, obtenemos una suma de késimas derivadas, siendo la *n*-ésima derivada, para toda *n*,

$f^{(n)}(x) = n!\,a_n +$ una suma de términos con $(x-a)$ como factor.

Puesto que todas estas ecuaciones son válidas cuando $x = a$, tenemos

$$f^{(n)}(x) = n!\,a_n \quad (7)$$

Estas fórmulas revelan un patrón en los coeficientes de cualquier serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-a)^n$ que converge a los valores de *f* en *I* (decimos "que representa a *f* sobre *I*"). Si esa serie existe (aún no lo sabemos) entonces sólo hay una de tales series y su *n*-ésimo coeficiente es

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (8)$$

Si *f* tiene representación como serie de potencias, ésta debe ser

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \quad (9)$$

Pero si empezamos con una función arbitraria *f*, infinitamente diferenciable en un intervalo I centrado en $x = a$, y la usamos para generar la serie de la ecuación (9), ¿convergerá la serie a *f* (*x*) en cada *x* del interior de *I*? La respuesta es: quizá; para algunas funciones sí, pero para otras no será así, como veremos más adelante.

Entonces, sea f una función con derivadas de todos los órdenes en algún intervalo que contenga a como un punto interior. **La serie de Taylor generada por f en $x = a$** es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \cdots \quad (10)$$

La linealización de una función diferenciable f en un punto a, es el polinomio de grado uno dado por

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \quad (11)$$

Si f tiene derivadas de orden mayor en a, también tiene aproximaciones polinomiales de orden mayor, una para cada derivada disponible. Estos polinomios se llaman polinomios de Taylor de f.

Sea f una función con derivadas de orden k para $k = 1, 2, \dots, N$ en algún intervalo que contenga a como un punto interior. Entonces, para cualquier entero n, de 0 a N, el **polinomio de Taylor de orden n** generado por f en es el polinomio

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (12)$$

Decimos que un polinomio de Taylor es de orden n y no de grado n porque $f^{(n)}(a)$ puede ser cero. Por ejemplo, los dos primeros polinomios de Taylor de $f(x) = \cos x$ en $x = 0$ son$P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = 1$. El polinomio de primer orden tiene grado cero, no uno.

Del mismo modo que la linealización de f en ofrece la mejor aproximación lineal de f en la vecindad de a, los polinomios de Taylor de orden mayor brindan las mejores aproximaciones polinomiales de sus respectivos grados.

3.2.1 Teorema de Taylor: Si f y sus primeras n derivadas f', f'',…, $f^{(n)}$ son continuas en el intervalo cerrado entre a y b y si$f^{(n)}$ es diferenciable en el intervalo abierto entre a y b, entonces existe un número c entre a y b, tal que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^k + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \quad (13)$$

El Teorema de Taylor es una generalización del Teorema del Valor Medio. Cuando aplicamos el teorema de Taylor, generalmente queremos mantener fija a a y usar a b como variable independiente. La fórmula de Taylor es más fácil de utilizar en esas circunstancias si cambiamos b por x. Ésta es la versión del teorema con este cambio.

3.2.2 Fórmula de Taylor: Si f tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo abierto I que contiene a a entonces para cada entero positivo n y para cada x en I,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \qquad (14)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \mathit{para\ alguna\ c\ entre\ a\ y\ x} \quad (15)$$

Cuando lo expresamos de esta forma, el teorema de Taylor dice que, para cada $x \in I$,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad (16)$$

La función $R_n(x)$ está determinada por el valor de la $(n+1)$-ésima derivada, $f^{(n+1)}$en el punto c, el cual depende tanto de a como de x y se encuentra entre ellos. Para cualquier valor de n que elijamos, la ecuación nos da una aproximación polinomial de f de ese orden y también una fórmula para el error cometido al usar esa aproximación sobre el intervalo I.

La ecuación (14) se conoce como **fórmula de Taylor**. La función $R_n(x)$ se llama **residuo de orden n** o **término de error** para la aproximación de f por $P_n(x)$sobre I. Si $R_n(x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ para toda$x \in I$ decimos que la serie de Taylor generada por f en $x = a$ converge a f en I, y escribimos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (17)$$

Con frecuencia es posible estimar R_n sin conocer el valor de c.

Se añade como corolario, la definición de convergencia de una serie, ya que si bien en el taller se toman postulados ya demostrados dentro de los intervalos de convergencia convenientes, y en los ejercicios se hace hincapié en el aporte de esta teoría como apoyo e instrumento de demostración de muchas otras de ramas muy diversas, se ha agregado en el taller teórico y en de ecuaciones características, un análisis de la convergencia de las series obtenidas.

3.2.3 Convergencia de una serie de potencias

Teorema: Si la serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para x = c ≠ 0 entonces converge absolutamente para toda x con $|x| < |c|$. Si la serie diverge para x = d, entonces diverge para toda x con $|x| > |d|$. En el caso de series de la forma $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ podemos hacer $(x-a) = x'$ y aplicar el teorema para *x'*.

4. Taller teórico con apoyo de simulaciones y animaciones

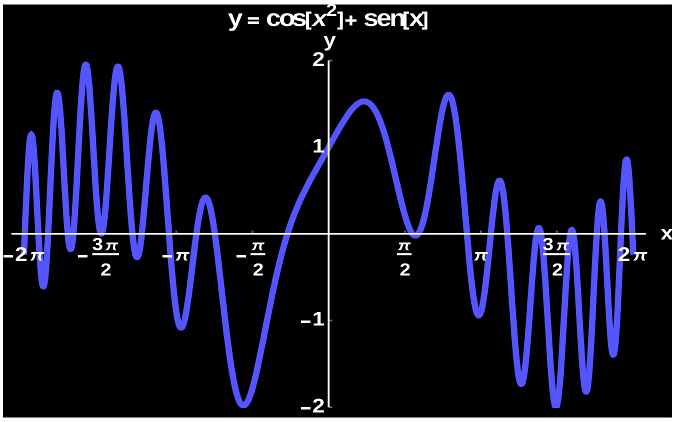
El Taller de teoría hace énfasis en el concepto de seris de potencias conocidas como series de Taylor. En muchos casos, las aproximaciones polinomiales de las funciones son muy útiles, sobre todo para su uso en software y en métodos de cálculo numérico. El taller muestra los conceptos de la serie de Taylor, en una clase teórica apoyada con animaciones para reforzar los conceptos. Inicialmente se hace un estudio de la estructura teórica que acompaña al razonamiento que concluye en la construcción del polinomio de Taylor y se analizan los intervalos de convergencia. Se realizan ejercicios para la práctica, como el descripto en la sección 4.3.

4.1 Ejercicio para trabajar en el taller

Se plantea el siguiente problema teórico: *"Hallar la serie de Taylor y los polinomios de Taylor generados por f(x) = cos (x^2) + sen (x) en x = 0. Mostrar cómo estos polinomios aproximan a f(x) en un intervalo cerca de x=0. Aproximar a f(x) en un intervalo más amplio, demostrando que el grado del polinomio aumenta al hacer lo mismo el intervalo""*

El taller se lleva a cabo en gabinete con computadoras para todos los participantes. Se provee un archivo generado en software de cálculo simbólico [9] para trabajar en forma dinámica y poder modificar y crear nuevas animaciones en tiempo real. La función utilizada es divergente, para lograr una observación más acentuada del ajuste de la curva a medida que se incrementa el número de términos. En la Figura 1 se puede observar la construcción del polinomio y la función representada visualmente de tal manera que pueda apreciarse muy claramente la aproximación de la misma por Taylor, junto con el análisis de su convergencia, haciendo la suma infinita y aplicando el criterio de la razón, dando como resultado la divergencia tal como se preveía. Se puede observar la forma caótica que toma la onda al alejarse del 0. La aproximación de esta ecuación requerirá de varios términos por lo que la potencia de la animación se podrá apreciar más claramente. La Figura 2 muestra los polinomios de aproximación de la serie de Taylor con los primeros términos. En la Figura 3 se van incrementando con ayuda del control de manipulación, cada curva en línea punteada es una aproximación con diferencia de un término de la anterior.

En la Figura 4 ya se observa como se ha logrado dibujar en forma totalmente ajustada la curva de la función real, con el uso de 68 términos del polinomio. El trabajo con las animaciones permite reforzar los conceptos, y comprender mejor la importancia del tema.




```
polinomios = Table[Normal[Series[Cos[x^2] + Sin[x], {x, 0, a}]], {a, 1, 20, 2}]
```

$$\left\{1+x,\ 1+x-\frac{x^3}{6},\ 1+x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{120},\ 1+x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040},\right.$$

$$1+x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{24}+\frac{x^9}{362880},\ 1+x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{24}+\frac{x^9}{362880}-\frac{x^{11}}{39916800},$$

$$1+x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{24}+\frac{x^9}{362880}-\frac{x^{11}}{39916800}-\frac{x^{12}}{720}+\frac{x^{13}}{6227020800},$$

$$1+x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{24}+\frac{x^9}{362880}-\frac{x^{11}}{39916800}-\frac{x^{12}}{720}+\frac{x^{13}}{6227020800}-\frac{x^{15}}{1307674368000},$$

$$1+x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{24}+\frac{x^9}{362880}-\frac{x^{11}}{39916800}-\frac{x^{12}}{720}+\frac{x^{13}}{6227020800}-\frac{x^{15}}{1307674368000}+\frac{x^{16}}{40320}+\frac{x^{17}}{355687428096000},$$

$$\left.1+x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{24}+\frac{x^9}{362880}-\frac{x^{11}}{39916800}-\frac{x^{12}}{720}+\frac{x^{13}}{6227020800}-\frac{x^{15}}{1307674368000}+\frac{x^{16}}{40320}+\frac{x^{17}}{355687428096000}-\frac{x^{19}}{121645100408832000}\right\}$$

```
In[1]:= suma = Sum[Cos[x^2] + Sin[x], {x, 0, Infinity}]

Sum::div : Sum does not converge. >>
```

Out[1]= $\sum_{x=0}^{\infty}\left(\mathrm{Cos}[x^2]+\mathrm{Sin}[x]\right)$

```
In[10]:= Limit[Abs[(Cos[(x + 1)^2] + Sin[x + 1]) / (Cos[x^2] + Sin[x])], x → Infinity] // N
```

Out[10]= Interval[{-2.22507×10^{-308}, ∞}]

Figura 1 Gráfica de la función *f(x) = cos (x^2) + sen (x)*, polinomio de Taylor de 20 términos para la misma y análisis de convergencia.
Fuente: elaboración propia

La intención de esta sección del taller no es la enseñanza específica de los temas, sino mostrar la importancia que tienen las estructuras matemáticas creadas por Taylor, y dejar en el alumno una chispa de interés por indagar por otros conocimientos que son utilizados permanentemente en el entorno, y que lamentablemente por problemas de tiempo no tienen espacio dentro de la abultada currícula de ingeniería.

5. Aplicaciones que utilizan las matemáticas de Taylor, simulaciones y animaciones

En esta sección se muestran tres aplicaciones en las se utilizan los métodos de Taylor para la obtención de la ecuación resultante. Como ejemplo se muestran los talleres de camino

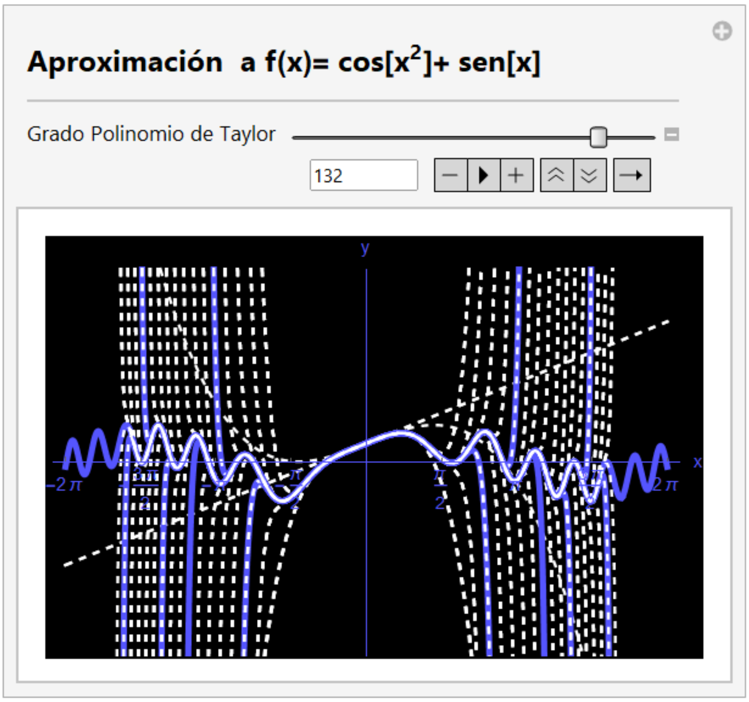


Figura 4. Aproximación de Taylor, ajuste a la curva con 132 términos
Fuente: elaboración propia

aleatorio, aplicaciones de la óptica y la solución para ecuaciones características. Acompañados de gráficos y animaciones generados especialmente para el dictado del taller, la consigna de estos talleres es mostrar la aplicación de los postulados de Taylor y que los participantes observen y practiquen con los resultados obtenidos, enriqueciendo con el manejo de las simulaciones su nivel matemático, ya que para el uso del software es necesaria una profunda comprensión de los temas. Además, son un estímulo para la investigación y la búsqueda constante del conocimiento. Por todo lo expuesto, el taller se destaca por la ejercitación orientada a la manipulación del software de cálculo simbólico. Las demostraciones teóricas de cada aplicación se entregan como un Anexo impreso, para su análisis y estudio.

5.1 Ecuaciones características de variables aleatorias [10]

Dada una variable aleatoria *(va) X*, tomando su valor medio como base, se dice que se puede caracterizar dicha variable si se obtienen todos los valores posibles que pueda asumir. El conocimiento del valor medio permite, muchas veces, facilitar enormemente el análisis estadístico de una variable. Se define a la función característica, que toma valores complejos y argumento real.

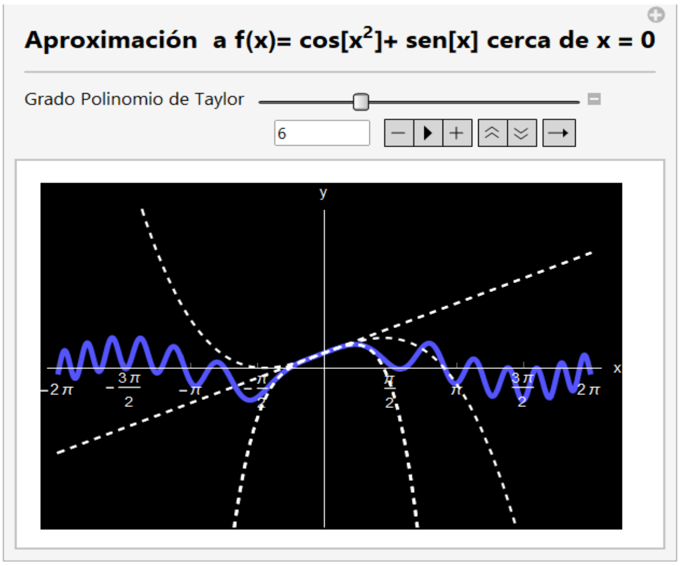


Figura 2. Aproximación de Taylor con pocos términos
Fuente: elaboración propia

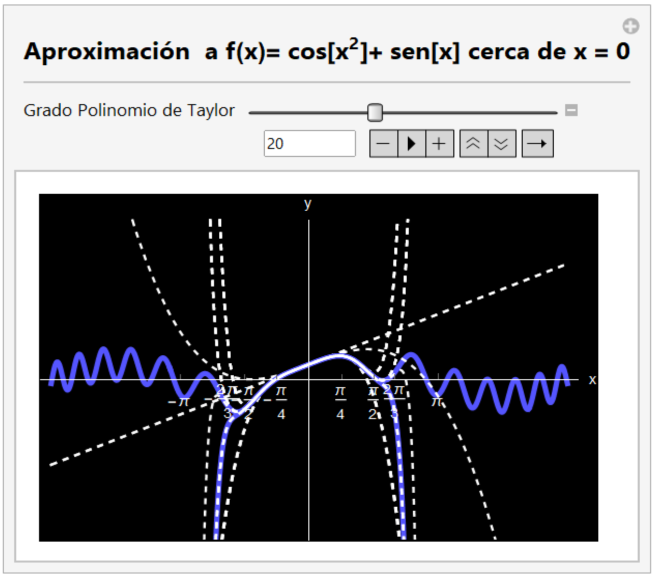


Figura 3. Aproximación de Taylor, aumento de términos a 20
Fuente: elaboración propia

Definida a partir de una variable aleatoria *X*, caracteriza a la distribución de la acumulada *F(x)* de esta variable aleatoria.

Las funciones características son especialmente adecuadas para el estudio de la convergencia débil de variables aleatorias independientes. Se define a la ecuación característica con la fórmula $f(t)=E(X)\, e^{(i\,t\,X)}$ o su equivalente:

$$f(t) = E(X)\, Cos\ (tX) + E(X) i\ Sen\ (tX) \quad (18)$$

a partir del dominio de la función, es decir el espacio muestral. Esta función *G* es la función característica de la *va*. Si todos los valores que pueda asumir *X* existen y son válidos (es decir, los números resultantes que efectivamente pertenecen al espacio muestral) entonces se demuestra que la ecuación característica es ***desarrollable en serie de Taylor*** alrededor de k=0, quedando (por (16) y (17)):

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i\, t^{(m)}(a)}{m!} M_m; \quad M_m = X^{(m)} \frac{1 d^{(m)}}{i^{\,(m)}\, d\, t^{(m)}} G(t)|_{k=0} \quad (19)$$

Este estudio es válido tanto para va discretas como continuas, ya que se puede hacer un traspaso de discreta a continua a través de la aplicación de la ecuación Delta de Dirac. Cada distribución tiene su función característica, por ejemplo la distribución exponencial posee la siguiente:

$$f(t) = \left(1 - \frac{i\,t}{\lambda}\right)^{-1} \quad (20)$$

En la Figura 5 se muestra la serie de Taylor de la ecuación característica obtenida y el análisis de la convergencia alrededor del 0 y en infinito. Esta ecuación está definida en el campo de los complejos por lo que no tiene representación gráfica, por ello se mostrará una aplicación de ecuaciones características, el camino aleatorio.

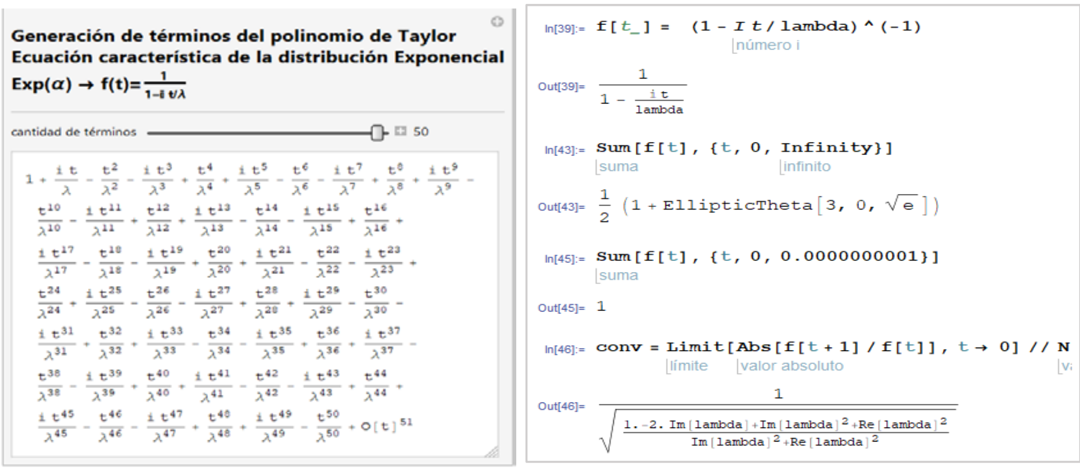


Figura 5. Desarrollo de Taylor de la ecuación característica
exponencial (20) y análisis de convergencia
Fuente: elaboración propia

5.1.1 Caso de ecuación característica: Camino aleatorio

Considere la suma de *r* variables aleatorias *(va)* X_i estadísticamente independientes e igualmente distribuidas donde cada una de las variables X_i puede tomar el valor ± 1 con probabilidades *p* y *q* respectivamente siendo $(p + q = 1)$. La función característica de la suma $Y_r = \sum_{i=0}^{r} X_i$ vendría dada por

$$f(t) = (pe^{it} + qe^{-it})^r \ (21)$$

Usando el desarrollo del binomio de Newton:

$$(A+B)^r = \sum_{n=0}^{r} \frac{r!}{n!\,(r-n)!} A^n B^{r-n} \ (22)$$

Se define así la llamada "Caminata Aleatoria" *(Random Walk)*. En este caso es una caminata aleatoria en dos dimensiones, ya que el movimiento ocurre en el plano *xy*. El valor aleatorio y corresponde a la distancia desde la posición de partida. El número de variables r corresponde al número de pasos efectuados por el "caminante". La Figura 6 muestra la animación de posibles caminatas aleatorias en dos dimensiones, conocidas como el problema del caminante, y la teoría de las apuestas secuenciales óptimas, fundamento teórico de la ganancia garantizada de los casinos. La Figura 7 muestra una caminata aleatoria de tres dimensiones, que imita el movimiento aleatorio de una partícula en el espacio, semejando el movimiento browniano. En esta animación se pueden observar paso a paso el recorrido de las trayectorias, y también la animación completa.

Siguiendo con la presentación de aplicaciones, y conectando con el tema de las trayectorias aleatorias de partículas, se introduce el tema del estudio en mecánica cuántica del destino de las partículas cuando son dispersadas por una fuente emisora, y la explicación del comportamiento de éstas en las cercanías del punto captor, a través del teorema óptico.

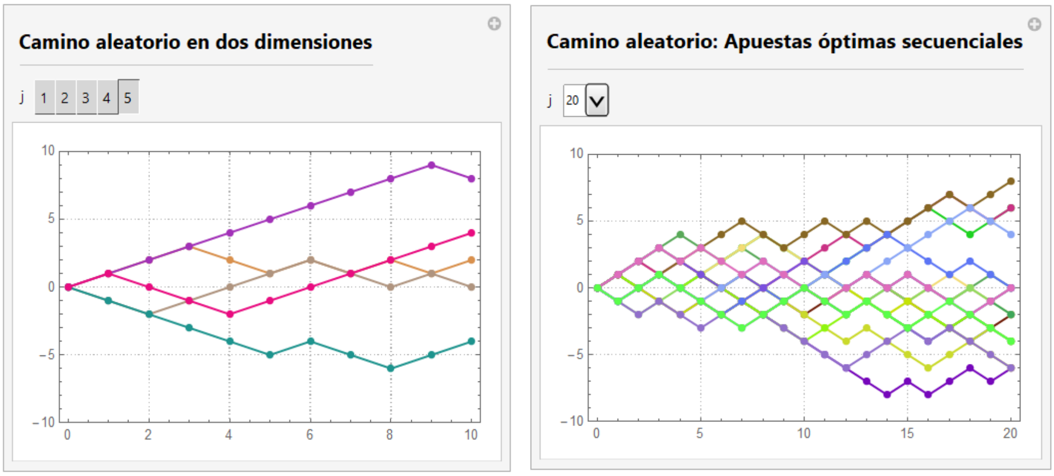


Figura 6. Animación de Caminata aleatoria en dos dimensiones
Fuente: elaboración propia

3.2 Aplicaciones a la óptica del polinomio de Taylor: Teorema Óptico [11]

El teorema óptico define el resultado de la dispersión de las ondas, que relaciona la amplitud de dispersión hacia delante con la sección eficaz de dispersión total de los objetos dispersantes que son chocados por las ondas. Creado simultáneamente por Wolfgang von Sellmeier y Lord Rayleigh en 1871, su fórmula generalizada obtenida por Heisemberg es:

$$\lim\{f(k',k)\} = \frac{k}{4\,\pi}\int f(k',k'')\,f(k'',k)dk \quad (22)$$

Según la premisa del teorema óptico, cualquier objeto que disperse luz debería tener una amplitud de dispersión no nula hacia delante, pero el campo observado en esta dirección en realidad tiene la suma de las ondas incidente y dispersada, pudiendo anularse mutuamente, generando una zona donde la dispersión no alcanza a transmitirse. El teorema se demuestra a partir del tratamiento de una onda escalar. Si una onda plana incide en un objeto, la amplitud de la onda a una gran distancia, y ángulos pequeños de dispersión, se puede demostrar ***aplicando la expansión de Taylor*** y se obtiene como medida de la distancia la ecuación (23):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cong z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \quad (23)$$

Posteriormente la ecuación (22) se aplicó a la teoría de la dispersión cuántica por varios científicos, y recibió el nombre de relación de Bohr–Peierls–Placzek tras una publicación

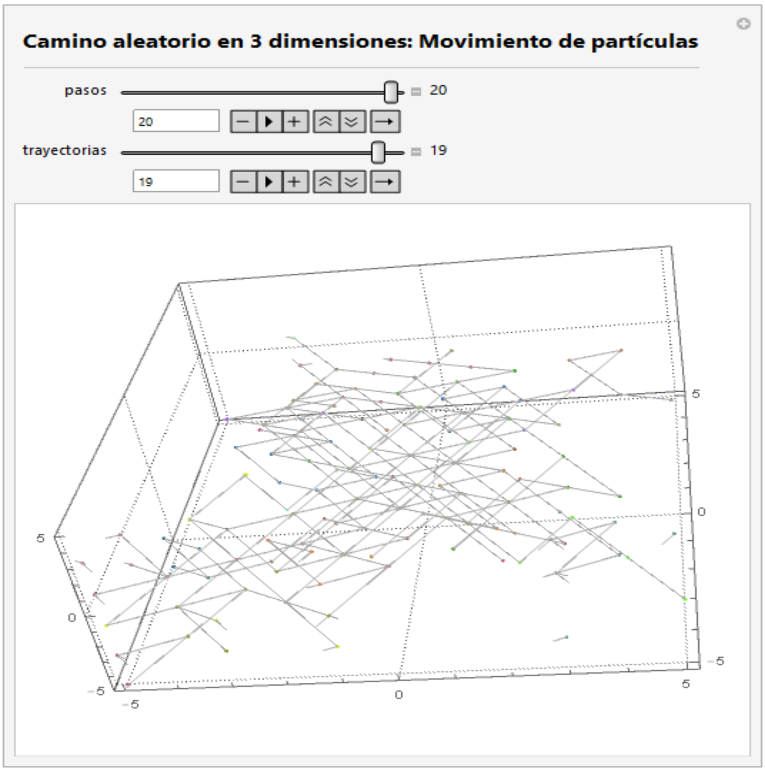


Figura 7. Animación de Caminata aleatoria en tres dimensiones. Movimiento de partículas
Fuente: elaboración propia

de 1939. La primera referencia publicada del Teorema Óptico fue en 1955 por Hans Bethe y Frederic de Hoffmann, después de haber recibido el nombre del "conocido teorema de la óptica" durante algún tiempo. Entrando ya en la mecánica cuántica, la aplicación del teorema óptico muestra que si se dispara un haz de electrones a un punto dispersor que está frente a una pantalla plana, siendo éste por ejemplo un núcleo atómico, si bien la teoría indicaría que los electrones se posicionan en órbitas alrededor del núcleo, siendo dispersados, algunos, aunque pocos, chocan en la pantalla plana justo detrás del núcleo. A modo de ejemplo de un potencial atractivo, se puede utilizar el potencial Yukawa atractivo con signo negativo:

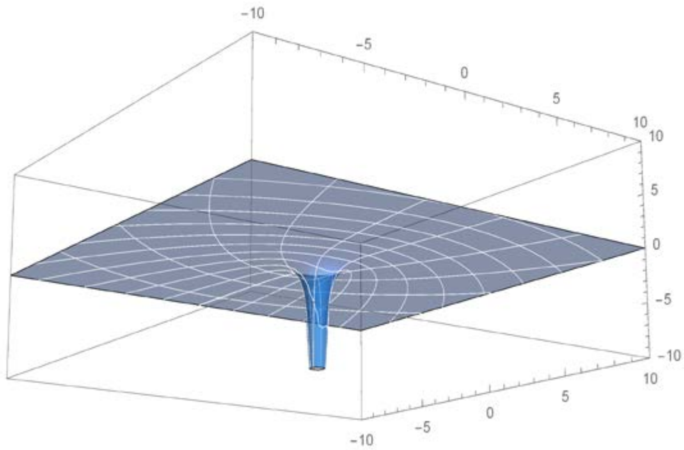


Figura 8. Teorema óptico en mecánica cuántica: singularidad en la zona de dispersión, vista inferior
Fuente: elaboración propia

$$V(r) = -\frac{e^{-0.2r}}{r} \quad (24)$$

Este potencial tiene una gráfica con una singularidad en $r = 0$, como se puede observar en las Figuras 8 y 9. En este caso el teorema muestra un valor muy pequeño pero no cero de cruce de electrones, como si hubieran atravesado el núcleo. Esto constituye una

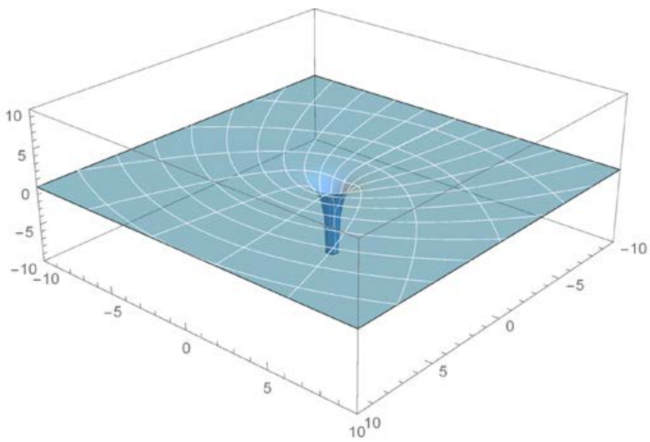


Figura 9 Teorema óptico en mecánica cuántica: singularidad en la zona de dispersión, vista superior
Fuente: elaboración propia

situación paradójica digna de estudio. Por ejemplo sabiendo que en el núcleo hay protones que tienen carga positiva, por lo que atraen a los electrones, la dispersión se puede ver comprometida.

La singularidad de la gráfica muestra la zona en donde los electrones que muestra una distribución del esparcimiento de partículas ciertamente f(0) puede ser diferente de cero, sin que haya una región de esparcimiento sombra, es decir una región en donde haya cero dispersión, siendo ésta ocupada por el punto dispersante.

6. Conclusiones y propuestas a futuro

El uso de animaciones está probado y se ha extendido, desde sus comienzos hasta la actualidad en diversas ciencias, para apoyo a la enseñanza. La aplicación de esta herramienta a temas complejos de la matemática supone un desafío para los docentes y los constructores de las herramientas informáticas, ya que al aumentar la complejidad, aumenta en forma exponencial la dificultad de codificación de la animación. Sin embargo, los resultados siempre son más que satisfactorios. En el caso del taller para el tema de las series y polinomios de Taylor, se ha dado un paso más allá, ya que no solo es brindar conocimiento, sino también disfrutar y dar el lugar que merecen los temas más importantes del cálculo, revisitar la historia de esta ciencia fascinante, y finalmente, tratar de brindar un camino hacia la excelencia en el conocimiento. En el intento de hacer ese camino, el docente que genera las animaciones aprende mucho más todavía, comprueba que él mismo puede asimilar de otra forma más profunda y afianzada los conceptos. Así luego podrá transmitir ese conocimiento reinsertado en su mente, de forma dinámica y visual, a los alumnos y participantes.

El taller ha tenido buena aceptación aunque para un sector somero de la población de la facultad, ya que está orientado a estudiantes muy avanzados y con muy alto nivel de conocimientos en matemática, y a otros participantes interesados en aprender más sobre matemática. Pero consideramos que su presentación y ofrecimiento dentro del ámbito de la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Rosario jerarquiza a la institución y al Departamento de Ciencias Básicas, mostrando una actitud de permanente deseo de superación y profundización del conocimiento.

7. Referencias

[1] FEURZEIG, W; ROBERTS, N: W; ROBERTS, N: *Modeling and Simulation in Science and Mathematics Education*- Springer-Verlag, Neew York Inc. *Google e-books* (1999)

[2] *Usos y ejemplos del Formato de Documento Computable* (CDF). *Wolfram Uses-Examples*. https://www.wolfram.com/cdf/uses-examples/textbooks.html (2015)

[3] Schoenfeld, A.: *Teaching mathematical thinking and problem solving.* Toward the thinking curriculum: Current cognitive research, pp 83-103 (1989)

[4] APOSTOL, T.: *Cálculus Volumen II.* Ed. Reverté (2002)

[5] TRADACETE P. Café y Teoremas

https://elpais.com/elpais/2017/08/23/ciencia/1503477489_793596.html

[6] KLINE M. Mathematical though from ancient and modern times Volume 3 Oxford University Press New York 1972 ISBN 0-19-506137-3 (PBK) (v. 3)

[7] TORRES M. A. Series de Taylor y Series de Fourier: Un estudio Comparativo Universidad de Granada, Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Ciencias, 2015

[8] THOMAS G. B *Cálculo de varias variables* (12º ed) Addison Wesley2011

[9] Wolfram Training Courses. *Wolfram, computation meets knowledge. http://www.wolfram.com/training/courses/* (2015)

[10] CÁCERES.M. *Elementos de estadística de no equilibrio y sus aplicaciones al transporte en medios desordenados* Comisión Nacional de Energía Atómica 2014.

[11] R. G. Newton *Optical theorem and beyond* American Journal of Physics American Journal of Physics 44, 639 (1976); https://doi.org/10.1119/1.10324