

ANÁLISIS DE LA CONVERSIÓN DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DEL TEMA CÓNICAS EN LA CÁTEDRA DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Carlos Gabriel Herrera, Facultad de Tecnología y Cs. Aplicadas. UNCA, cgherrera@tecno.unca.edu.ar

Carlos Humberto Savio, Facultad de Tecnología y Cs. Aplicadas. UNCA, chsavio@tecno.unca.edu.ar

Ana Carolina Olmos, Facultad de Tecnología y Cs. Aplicadas. UNCA,
kros2022@gmail.com

Hugo Rubén Dip, Facultad de Tecnología y Cs. Aplicadas. UNCA,
hugorubendip@gmail.com

RESUMEN - La investigación está enmarcada en el Proyecto: “El aporte del GeoGebra en el proceso de conversión de las representaciones semióticas de objetos matemáticos de Geometría Analítica” que tiene como objetivo principal determinar cómo incide en el aprendizaje de los objetos matemáticos de la Geometría Analítica, las actividades cognitivas de conversión entre sus registros de representación semiótica. El objetivo de este trabajo es analizar las dificultades en realizar actividades de conversión de registros de representación semiótica del tema cónicas por parte de los alumnos de las carreras de ingeniería de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la UNCA. Entre los temas desarrollados en este curso de Geometría Analítica, se han observado en actividades que se realizan durante el cursado de la asignatura, la ausencia de congruencia entre dos o más representaciones referidas al mismo objeto matemático y de manera muy especial en el tema cónicas. Prueba de ello son los resultados de los ejercicios que vinculan en distintos apartados, las representaciones algebraicas y las representaciones geométricas de las ecuaciones de la circunferencia, de la parábola, de la elipse y de la hipérbola. Se presentan en este trabajo el análisis del estudio efectuado a actividades realizadas durante las actividades de la Asignatura Geometría Analítica de la cohorte 2017 de carreras de Ingeniería en Agrimensura, Electrónica, Informática y Minas, poniendo énfasis en actividades que requieran la conversión de registros de representación de una cónica. Para cumplir con este objetivo se ha seleccionado una muestra de alumnos de cada una de las carreras mencionadas y se seleccionaron además los registros que hacen referencia a la vinculación existente entre las representaciones semióticas de las cónicas citadas. Se incorporan además los resultados de los exámenes finales de los alumnos que componen la muestra como un elemento más para indagar la congruencia entre los resultados obtenidos.

Palabras Claves – *Representaciones Semióticas, Cónicas, Geometría Analítica*

1 Introducción

Según Duval [1] el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión.

En la matemática, encontramos distintos sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, escrituras algebraicas, lógicas, funcionales que se tornan en lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar las relaciones y operaciones, figuras geométricas, gráficos cartesianos, redes, diagramas. Cada una de las actividades anteriores, constituye una forma semiótica diferente y se entiende por tal, a la actividad de formación de representaciones realizadas por medio de signos. Los conceptos matemáticos no son objetos reales, por consiguiente se debe recurrir a distintas representaciones para su estudio y para llevar ésto a cabo resulta importante tener en cuenta que estas representaciones no son el objeto matemático en sí, sino que ayudan a su comprensión. Si no se distingue el objeto matemático de sus representaciones, no puede haber comprensión en matemática. El dominio de las operaciones necesarias para cambiar de representación es fundamental, es una operación cognitiva básica, prueba de ello es la falta de coherencia en las respuestas de los ejercicios o situaciones problemáticas que en las evaluaciones parciales de la Asignatura Geometría Analítica de Carreras de Ingeniería de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas se dan año a año. En el mismo sentido Gruszycki [2], citando a Duval, afirma que “ Toda confusión entre el objeto y su representación provoca, en un plazo más o menos amplio, una pérdida de la comprensión: los conocimientos adquiridos se hacen rápidamente inutilizables por fuera de su contexto de aprendizaje, sea por no recordarlos, o porque permanecen como representaciones “inertes” que no sugieren ningún tratamiento productivo.”. Es decir que las dificultades en las actividades cognitivas de conversión de un registro de representación a otro, se traducen en falta de comprensión del objeto matemático en estudio. En ese sentido en Ornellas[3] se presenta una secuencia didáctica para el estudio de cónicas desde el punto de vista de sus representaciones semióticas.

En ese contexto se planteó como objetivo de este trabajo analizar las dificultades en realizar actividades de conversión de registros de representación semiótica del tema cónicas por parte de los alumnos de la Cátedra de Geometría Analítica del Ciclo Básico de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la UNCA

2 Fundamentación Teórica

Dado que los objetos matemáticos son entes abstractos, sólo es posible trabajar con ellos a través de sus representaciones, considerándose que una representación es un signo o una configuración de signos, caracteres u objetos que pueden ponerse en lugar de algo distinto de él mismo (simbolizar, codificar, dar una imagen o representar). Por tal motivo, es posible que el objeto representado varíe según el contexto o el uso de la representación del mismo, así por ejemplo en el caso de un gráfico cartesiano puede representar una función o quizás el conjunto solución de una ecuación algebraica.

En matemática, las representaciones no se pueden entender de manera aislada, así una gráfica particular en un sistema cartesiano adquiere sentido sólo como parte de un sistema más amplio con significados y convenciones formando un sistema de representaciones de un mismo objeto matemático según sostienen Goldin [4].

“Se consideran representaciones internas los constructos de simbolización personal de los estudiantes, las asignaciones de significado a las notaciones matemáticas. En Goldin[4] se incluyen también como representaciones internas el lenguaje natural del estudiante, su imaginación visual y representación espacial, sus estrategias y heurísticas de resolución de problemas, y también sus afectos en relación a las matemáticas. Las representaciones cognitivas internas (o mentales) se introducen como una herramienta teórica para caracterizar las cogniciones complejas que pueden construir los estudiantes sobre las representaciones externas. No se pueden observar directamente, sino que son inferidas a partir de conductas observables” Godino [5]

“Los sistemas de representaciones externas comprenden los sistemas simbólicos convencionales de las matemáticas tales como la numeración en base diez, notación formal algebraica, la recta numérica real, la representación en coordenadas cartesianas. También se incluyen entornos de aprendizaje, como los que utilizan materiales manipulativos concretos, o micro mundos basados en el uso de ordenadores. Algunos sistemas de representación externos son principalmente notacionales y formales, como los sistemas de numeración, escritura de expresiones algebraicas, convenios de expresión de funciones, derivadas, integrales, etc. Otros sistemas externos muestran relaciones de manera visual o gráfica, como las rectas numéricas, gráficos basados en sistemas cartesianos o polares, diagramas geométricos; las palabras y expresiones del lenguaje ordinario son también representaciones externas. Pueden denotar y describir objetos materiales, propiedades físicas, acciones y relaciones, u objetos que son mucho más abstractos. Godino [5].

La relación entre estas dos modalidades de representación fue expresada por Romero [6], para que las representaciones mentales y las representaciones externas no puedan ser vistas como dominios diferentes, pues el desenvolvimiento de las representaciones mentales se da como una interiorización de las representaciones externas y la diversificación de las representaciones de un objeto aumenta la capacidad cognitiva del sujeto y, por consiguiente, sus representaciones mentales.

De igual modo y coincidiendo con Romero [6] es posible afirmar que se ha generado la comprensión de un concepto por parte de un estudiante, o de un docente, o de una persona en general, cuando el mismo ponga de manifiesto que ha enriquecido sus redes internas de conocimiento, lo cual sólo es posible observar a través de los sistemas de representación y a través de las actividades que pueda realizar asociadas a los mismos, con respecto al concepto en cuestión.

“Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación. Una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes” Duval [7]. El mismo define las representaciones semióticas como producciones humanas constituidas por el empleo de signos y que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significación y de funcionamiento. Un

enunciado en lenguaje natural, una figura geométrica, una gráfica, una expresión algebraica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes.

Según Duval [7] para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales:

- La formación de una representación identificable dentro de un registro dado. Por ejemplo, el enunciado de una frase, la elaboración de un dibujo o esquema, de una gráfica, la escritura de una expresión algebraica, etcétera. Esta formación debe respetar las reglas propias del registro semiótico en el cual se produce la representación, la función de estas reglas es asegurar las condiciones de identificación y de reconocimiento de la representación, así como también la posibilidad de su utilización para los tratamientos.
- El tratamiento de una representación, que es la transformación de esta representación en el registro mismo dónde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna equivalente en un registro. Por ejemplo, la transformación equivalente de una expresión algebraica.
- La conversión de una representación, que es la transformación de esta representación en una representación dentro de otro registro, conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial. Por ejemplo, la transformación de una expresión algebraica en una gráfica, o viceversa.

3 Metodología

La investigación se realizó durante el cursado de la asignatura Geometría Analítica que corresponde al Ciclo Básico de las carreras de Ingeniería en Agrimensura, Electrónica y de Minas de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la Universidad Nacional de Catamarca. Se trata de una investigación de carácter descriptivo. Desde el punto de vista temporal es una investigación de carácter transversal ya que se considera un instante determinado durante el cursado de la asignatura para poner en práctica el instrumento de recolección de datos. La muestra dirigida quedó acotada a los alumnos de primer año de las carreras mencionadas (Agrimensura, Minas y Electrónica) y como unidad de análisis se consideraron 15 alumnos de la cohorte 2017 sobre un total de 72, que hayan cumplido las siguientes condiciones: a) finalizado el cursado de la asignatura, b) que no sean reinscriptos c) que no hayan cursado carreras afines a las ciencias exactas previamente, y d) que hayan aprobado la asignatura ya sea durante el cursado por el régimen de promoción o por examen final.

Se utilizó como instrumento de recolección de datos un cuestionario que consistió en cuatro actividades sobre el tema cónicas, que requerían por parte de los alumnos de actividades cognitivas de tratamiento en el marco de una representación semiótica o de conversión de un registro de representación a otro de acuerdo al marco teórico que sustenta este trabajo. Estas situaciones se describen a continuación:

Actividad 1: “Graficar una circunferencia cuya ecuación general es $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ ”. Se trata de realizar una representación gráfica de una circunferencia que es presentada en registro algebraico. Para poder cumplir la consigna es necesario la transformación de una ecuación general a la forma canónica para poder identificar de manera inmediata los elementos característicos de la circunferencia: Coordenadas del Centro (h, k) y la medida del radio r. Esta

situación requiere de las actividades cognitivas de tratamiento en el registro algebraico y su posterior conversión a registro gráfico.

Actividad 2: “Si el vértice de una parábola se encuentra a dos unidades por encima del origen del sistema de coordenadas, sabiendo que el foco se encuentra en el origen, graficar la parábola y determinar las ecuaciones de la recta directriz y del eje de simetría”. En este caso y a partir de puntos que son elementos de la parábola, como el vértice y foco se solicitan otros elementos de la misma y su representación gráfica. Esta situación requiere de actividades cognitivas de conversión de registro tabular al registro gráfico, aplicando la definición de parábola.

Actividad 3: “Determine la ecuación canónica de elipse de eje horizontal con centro en $(-2, 2)$, la distancia del centro al vértice del semieje mayor igual a cinco unidades y distancia focal igual a cuatro unidades. Graficar la elipse”. En este caso se trabaja sobre una serie de datos que en este caso son también elementos de la curva y se solicita la ecuación de la misma, siendo necesario una actividad cognitiva de conversión del registro de representación tabular y coloquial al registro algebraico y al registro gráfico o geométrico.

Actividad 4: “Determine la ecuación de la hipérbola cuyos vértices que limitan al eje real vertical son respectivamente $(-3,4)$ y $(-3,0)$ y su semieje ideal es igual a una unidad. Realice una representación gráfica de la misma”. La situación es de similares características a la anterior, se parte de elementos de la curva y se solicita su ecuación y su representación gráfica. Para resolverlo, es necesario que realizar actividades cognitivas de conversión del registro tabular y coloquial al registro algebraico y gráfico.

Se realizan análisis cuantitativos y cualitativos de las respuestas que los alumnos presentan para las cuatro situaciones planteadas. En el análisis cuantitativo se consideran las categorías correcto, incorrecto o no responde, presentando los resultados en una tabla, mientras que en el análisis cualitativo se pone énfasis en los errores tanto en actividades de tratamiento en un marco en particular como de conversión de un registro semiótico de representación a otro.

4 Resultados

En Tabla 1 se presentan las frecuencias de respuestas para las cuatro actividades propuestas de los 15 alumnos de la muestra.

Tabla 1: frecuencias de respuestas a las actividades del instrumento de recolección de datos.

CATEGORÍA	1A	1B	2A	2B	3A	3B	4A	4B
CORRECTO	11	9	8	8	13	11	13	8
INCORRECTO	3	2	2	2	1	1	2	3
NO RESPONDE	1	4	5	5	1	3	0	4

Fuente: elaboración propia

Las columnas 1A y 1B de la tabla corresponden a las actividades de tratamiento y conversión de registros de representación respectivamente de circunferencia, 2A y 2B corresponden a actividades sobre parábola, 3A, 3B representan los resultados de actividades cognitivas de conversión del registro verbal al algebraico y verbal al registro gráfico de elipse, mientras que las columnas 4A y 4B corresponden a actividades de conversión de registros de hipérbola.

De las cuatro cónicas estudiadas en este curso, el grado de acierto en las situaciones mencionadas, se destaca:

En el tema circunferencia sobre un total de 15 alumnos, 11 realizan correctamente la actividad cognitiva de tratamiento en el registro algebraico (En Tabla 1), es decir la transformación de la ecuación general de la circunferencia en la forma canónica, requisito previo necesario para graficar la curva de los cuales ocho alumnos realizan la gráfica correctamente. Dos alumnos obtuvieron las coordenadas del centro de la circunferencia utilizando las fórmulas, sin completar cuadrados $h = -D/2$, $k = -E/2$, $r^2 = h^2 + k^2 - F$. Se produce en un caso un error de signo en la ecuación canónica aunque realiza la gráfica correctamente. En las respuestas incorrectas de la actividad descrita, se observan errores algebraicos al completar cuadrados para deducir la ecuación canónica de la circunferencia. Respecto a la actividad de conversión de registros 9 alumnos grafican correctamente la circunferencia. (1B)

En la segunda actividad solicitada (2B), 8 alumnos grafican correctamente la curva a partir de las coordenadas del vértice y foco de la misma. Es decir realizaron correctamente el pasaje del registro coloquial al gráfico, sin necesidad de plantear la ecuación de la curva (aplican correctamente la definición de parábola para poder graficar tuvieron que representar en un sistema de coordenadas las coordenadas del vértice y del foco. Se observa como error en esta actividad que dos alumnos no logran ubicar el vértice de la parábola entre la recta directriz y el foco, es decir no deducen a partir de la definición de la curva, la posición correcta del vértice. Los mismos alumnos sin embargo determinan correctamente las ecuaciones de recta directriz y eje de simetría de la parábola. (2A). La mayor dificultad - en este tipo de ejercicios radica en que a partir de puntos notables de la curva no logran graficar la misma, posiblemente por no tener incorporada la definición de parábola.

En la tercera actividad que incluyó dos actividades de conversión de registros de representación, se observa que 13 alumnos determinan correctamente la ecuación canónica de la elipse a partir del centro expresado como par ordenado, la distancia focal y la distancia a uno de los vértices del eje mayor de la curva (3A). De estos 13 alumnos, 11 grafican correctamente la elipse (3B), actividad de conversión del registro algebraico al geométrico. Los errores observados son producto de confusiones entre los valores de las distancias de los vértices de los ejes mayor y menor al centro de la elipse, lo que produce errores en las actividades de conversión a los registros algebraicos y gráficos. Si bien es cierto se advierte en estos últimos casos que la equivocación cometida en la obtención del registro geométrico provienen de errores de cálculo numérico, no quita que el alumno reconozca la curva de la que se trate y las características de la

misma. Es deseable asimismo que sea el mismo estudiante que reflexione acerca de la coordinación o no de los gráficos obtenidos en función de las consignas dadas.

En la cuarta actividad es de similares características a la anterior, 13 alumnos determinan correctamente la ecuación de la hipérbola a partir de elementos de la misma expresados de manera coloquial (4A) de los cuales ocho representan correctamente la gráfica (4B). En el marco algebraico se observan errores en la identificación de las distancias del semieje real y semieje ideal al centro de la hipérbola, mientras que en el marco gráfico o geométrico se observa en un caso que no dibujan las asíntotas de la curva, y en dos casos no grafican la curva aunque si dibujan los elementos de la hipérbola, como centro, semieje real y semieje ideal. Con el propósito de constatar la aprehensión de los conceptos desarrollados, se incluyen en los exámenes finales escritos, una gama de ejercicios que pueden dar cuenta de las conversiones de las expresiones semióticas de las cónicas motivo central de este trabajo. Nueve (9) de los quince (15) alumnos ya han aprobado la Asignatura. Los alumnos que ya aprobaron la asignatura, son los que evidenciaron menores dificultades en las actividades cognitivas de conversión de registros semióticos de representación del tema cónicas.

5 Conclusiones

Del análisis de los resultados obtenidos en la realización de las actividades propuestas por parte de los alumnos se pueden deducir las siguientes conclusiones:

No se han observado grandes dificultades en la actividad cognitiva de conversión del registro algebraico, o verbal al registro gráfico o geométrico excepto en el tema parábola, donde el porcentaje de respuestas correctas es menor que para las otras curvas.

Pueden graficar una parábola sin tener que recurrir a su ecuación canónica, lo hacen a partir de dos elementos dados de la parábola aplicando la definición.

En elipse e hipérbola confunden los valores de los semi-ejes mayor y menor “a” y “b”, y en hipérbola lo hacen con los semiejes real e imaginario. Habría que indagar por ese lado, también el signo del término que contiene a la distancia del semieje imaginario “b” en hipérbola.

Se propone como apoyo didáctico el uso del software de geometría dinámica GeoGebra, que permite en pantalla trabajar simultáneamente con tres registros: algebraico, geométrico y tabular, como por ejemplo en el caso de cónicas se pueden plantear actividades que requieran la coordinación de registros semióticos de representación, que se puede visualizar en pantalla a través de las vistas algebraicas, gráficas y la tabla de cálculo del software.

Se pretende que los alumnos haciendo uso del botón secundario del mouse sobre la ecuación que distingue a la curva en cuestión, pueda visualizarla tanto en la forma canónica (o entrada como lo define el software) o estándar u “ordinaria” que posibilita en un solo paso, llegar a la ecuación en su forma general.

Referencias

- [1] DUVAL, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.
- [2] GRUSZYCKI, A. E., OTEIZA, L. N., MARAS, P. M., GRUSZYCKI, L. O., & BALLE, H. A. (2012). Uso de Geogebra para potenciar las diferentes representaciones en geometría analítica. *In Conferencia Latinoamericana de Geogebra* (pp. 520-524)
- [3] ORNELAS, M. Y. D., DIÉGUEZ, A. G. F. D. A., SÁNCHEZ, P. H., & FONSECA, A. A. (2016). Secuencia didáctica para el aprendizaje de las figuras cónicas y sus diferentes representaciones. *CULCyT*, (50).
- [4] GOLDIN, G. STHEINGOLD, (2001). *System of representations and the development of mathematical concepts. The roles of representation in school mathematics*, 1-23.
- [5] GODINO, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas*. Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. <http://www.ugr.es/local/jgodino>.
- [6] ROMERO, I. (2000). Representación y comprensión en pensamiento numérico. *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 35-46).
- [7] DUVAL, R. (1993): *Semiosis y noesis. Lecturas en didáctica de la matemática: Escuela Francesa*, 118-144.