LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN R^3 DESDE LA PRESPECTIVA DE LA TEORÍA APOE

Oscar Eduardo Moreno, Facultad de Tecnología y Cs. Aplicadas. UNCA, oscarmoreno@tecno.unca.edu.ar

Humberto Gabriel Gallo, Facultad de Tecnología y Cs. Aplicadas. UNCA, hgg252002@yahoo.com.ar

Mónica Adriana Argüello, Facultad de Tecnología y Cs. Aplicadas. UNCA, monicaarguello11@hotmail.com

Carlos Gabriel Herrera, Facultad de Tecnología y Cs. Aplicadas. UNCA, cgherrera@tecno.unca.edu.ar

Resumen - Se analizan en esta investigación las construcciones mentales necesarias para la construcción del concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales en R^3, desde el punto de vista de la teoría APOE. Este trabajo integra un proyecto que investiga la forma en que los estudiantes del Ciclo Básico de Ingeniería aprehenden conceptos del Álgebra Lineal, utilizando un análisis desde la teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE), identificando cuáles construcciones mentales son necesarias para la conceptualización de un objeto matemático y cuáles son los principales obstáculos que enfrentan. El proceso de investigación en esta teoría se fundamenta en un modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir un esquema matemático, llamado descomposición genética. Esta consiste en una hipótesis, sobre una descripción detallada de las construcciones que los estudiantes pueden hacer para aprender un tema matemático en particular. En este caso se presenta un análisis preliminar basado en la descomposición genética propuesta para el tema Sistemas de Ecuaciones Lineales, teniendo en cuenta la ubicación temporal del mismo en el programa de la asignatura Algebra, que corresponde a la tercera y cuarta semana de cursado de una asignatura anual. Se trabajó sobre una población de alumnos de primer año de Ingeniería de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la Universidad de Catamarca y se elaboró un instrumento de recolección de datos basado en un cuestionario semiestructurado, donde los alumnos debían resolver situaciones planteadas y justificar sus respuestas. Los datos que se obtienen, se pueden emplear para refinar la descomposición genética propuesta, a fin de dar cuenta de mejor manera de las construcciones mentales de los estudiantes al aprender dicho concepto, y también se puede utilizar como una guía, en el diseño de material didáctico y de estrategias para el proceso de enseñanza aprendizaje.

Palabras Claves: *Sistemas de Ecuaciones, Álgebra Lineal, APOE*

1. Introducción

Este trabajo integra un proyecto que investiga la forma en que los estudiantes universitarios aprehenden conceptos del Álgebra Lineal, utilizando un análisis desde la teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE), identificando cuáles construcciones mentales son necesarias para la conceptualización de un objeto matemático y cuáles son los principales obstáculos que enfrentan. El proceso de investigación en esta teoría se fundamenta en un modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir un esquema matemático, llamado descomposición genética. Esta consiste en una hipótesis, sobre una descripción detallada de las construcciones que los estudiantes pueden hacer para aprender un tema matemático en particular. En este sentido se han realizado estudios que analizan las construcciones mentales de diferentes conceptos del Álgebra Lineal como por ejemplo en [1] se realiza un análisis teórico de las construcciones involucradas en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, espacio vectorial, base de un espacio vectorial, transformaciones lineales. En [2] se analizan las construcciones del concepto Combinación Lineal de Vectores desde el punto de vista de la teoría APOE, y también el uso del mismo concepto desde la perspectiva de una célula generadora involucrando conceptos asociados. El concepto de espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE es estudiado para analizar el camino de construcción del concepto por parte de los estudiantes [3]. Otro trabajo [4] plantea una descomposición genética del concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales, analizando el aspecto relacionado con la resolución del sistema, es decir la mecánica operatoria de los métodos de resolución como Gauss, Gauss-Jordan o método de Kramer.

En las carreras de Ingeniería que se dictan en la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la UNCA, los contenidos de Álgebra Lineal son abordados en ~~la~~ una asignatura de carácter anual con un total de 120 horas de clases teóricos prácticas. El tema Sistemas de Ecuaciones Lineales se dicta en la tercera y cuarta semana de clases luego de los temas matrices y operaciones con matrices. En el marco de investigaciones realizadas previamente en la cátedra Algebra se ha trabajado en el estudio de conversión de registros semióticos del tema sistemas de ecuaciones lineales [5], como así también en el uso de software de geometría dinámica GeoGebra como herramienta didáctica en el proceso educativo, especialmente en la coordinación de los registros algebraico, matricial y geométrico de diferentes conceptos de Algebra Lineal [6], [7], [8].

En función de lo citado precedentemente se ha planteado como objetivo de esta investigación preliminar analizar las construcciones mentales para resolver un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial teniendo en cuenta la ubicación temporal del tema en el programa de estudios de la asignatura Algebra del primer año de carreras de Ingeniería de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la Universidad Nacional de Catamarca.

2. Marco Teórico

2.1 Teoría APOE

Esta investigación está fundamentada en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) [9]. El proceso de investigación, en esta teoría, conlleva el realizar un modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir un concepto matemático, llamado descomposición genética. Esta consiste en una hipótesis sobre una descripción detallada de las construcciones que los estudiantes pueden hacer para aprender un concepto. La descomposición genética se pone a prueba con los estudiantes y los datos que se obtienen, se pueden emplear para refinarla, a fin de dar cuenta de mejor manera de las construcciones de los estudiantes al aprender dicho concepto [9], y también se puede utilizar como una guía, en el diseño de material didáctico. En ese sentido, el conocimiento matemático de un individuo, es su tendencia a responder a las situaciones problemáticas, reflexionando sobre ellas y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizarlos en esquemas, a fin de manejar las situaciones [10].

Se mencionan las estructuras mentales denominadas: acción, proceso, objeto y esquema, que constituyen la parte primordial de esta teoría. Una acción consiste en una transformación de un objeto, que es percibida por el individuo como externa, y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos por seguir. Cabe recalcar que la construcción de acciones viene a ser crucial al inicio de la construcción de un concepto. Cuando una acción, o una serie de acciones se repite y el individuo reflexiona sobre ellas, se puede ***interiorizar*** en un proceso. Así, el individuo puede pensar en un concepto en términos generales y no precisa hacer cálculos explícitos. Este sujeto, también es capaz de incorporar estas acciones a su conocimiento, y decide llevarlas a cabo por su propia cuenta, sin necesidad de indicaciones externas. Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso como un todo, realiza las transformaciones, ya sean acciones o procesos, que pueden actuar sobre él y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces, ha logrado ***encapsular*** este proceso en un objeto [11]. Con respecto al logro del último nivel, denominado esquema, se puede decir que un esquema para un concepto en matemática, es una colección coherente de acciones, procesos y objetos y otros esquemas relacionados entre sí, consciente o inconscientemente en la mente de un individuo, que se pueden utilizar en una situación problemática, que tiene relación con ese concepto matemático [12]. La coherencia, se refiere a que el estudiante puede decidir si alguna situación matemática se puede trabajar utilizando el esquema.

En la teoría APOE se parte de un análisis de los conceptos matemáticos, en el que se ponen de relieve las construcciones cognitivas que pueden ser requeridas en su aprendizaje. A este análisis se le conoce como descomposición genética del concepto; es decir: una descomposición genética parte del análisis de las construcciones que el sujeto hace, conforme aprende el concepto matemático, en términos de lo que es observable. En el presente trabajo se presenta un modelo de descomposición genética del concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales en R^3, teniendo en cuenta, que se trata de un curso de Algebra Lineal correspondiente al ciclo básico de carreras de Ingeniería, y que el tema está ubicado temporalmente en el currículo en la tercera semana de clases sobre un total de treinta, es decir al principio del cursado de la asignatura, después del tema matrices y en paralelo al curso de Geometría Analítica, donde se estudian las ecuaciones de la recta y el plano en R^3.

2.2 Descomposición Genética del Concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales

En un principio, son los investigadores quienes proponen, basados en su experiencia en el aula, una descomposición genética del concepto por estudiar; posteriormente, a través de la propia investigación, dicha descomposición se refina de modo que explique de mejor manera, la forma en que aprenden los estudiantes cuando trabajan con un concepto matemático. “Es importante aclarar que no existe una descomposición genética única, ya que esta depende de la formulación que ha hecho el investigador. Pueden coexistir varias descomposiciones genéticas del mismo concepto”, según afirma Trigueros, pág 8 [12]. Lo que importa es que cualquier descomposición genética sea un instrumento que dé cuenta del comportamiento observable del sujeto.

En esta investigación se aborda el concepto “Sistemas de Ecuaciones Lineales” desde un punto de vista integral, no solo considerando los procedimientos de resolución de los mismos; sino también, otras dos cuestiones de fundamental importancia, que son el planteamiento y resolución en forma matricial y la interpretación geométrica del conjunto solución.

A continuación, se efectuará una propuesta de descomposición genética del concepto de Sistemas de Ecuaciones lineales, enfocada desde estos dos aspectos. (Fig. 1).

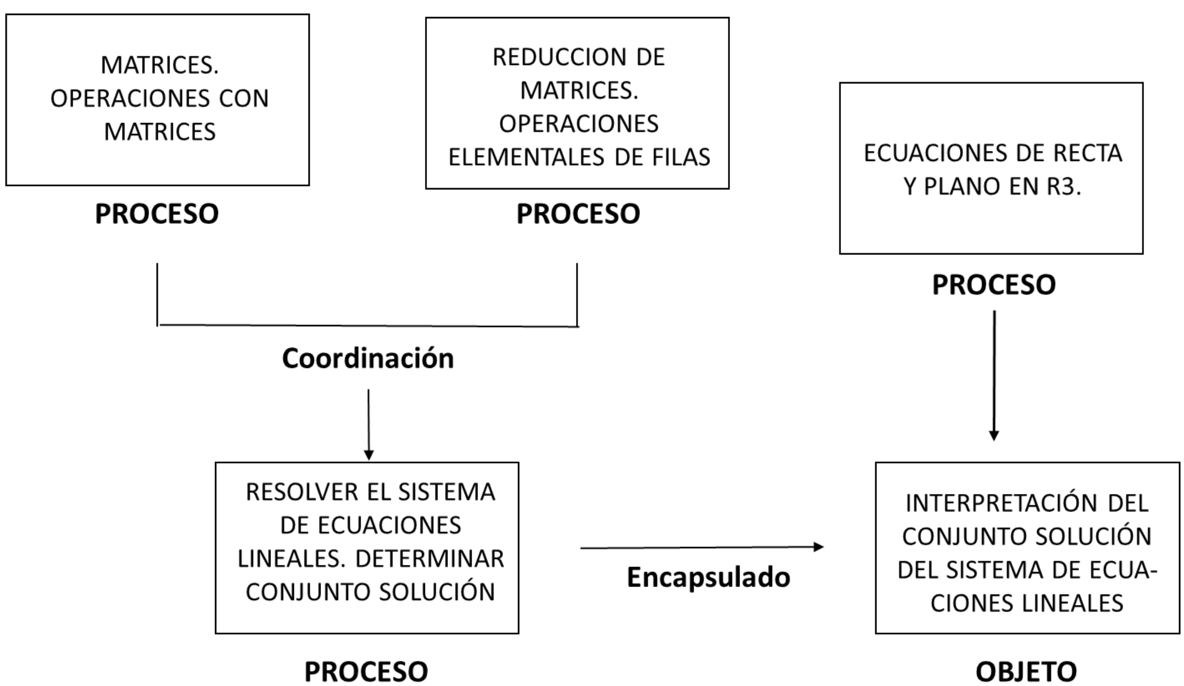

Fig. 1: Descomposición Genética del Concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Se parte del supuesto que el alumno debe haber alcanzado un nivel proceso del concepto matrices y sus operaciones, ya que el sistema de ecuaciones planteado en forma escalar debe traducirse a la forma matricial, es decir como un producto de matrices A.X = B, donde A es la matriz de coeficientes, X es la matriz de variables o incógnitas y B es la matriz de términos independientes. El nivel proceso involucra que el alumno además del planteo del problema debe comprender que para la resolución del sistema se debe obtener la matriz escalonada o escalonada reducida por filas. Para ello es necesario que también se haya alcanzado el nivel proceso en la reducción de matrices a través de las operaciones elementales de filas obteniendo matrices equivalentes por filas, respecto a la formulación matricial original del sistema. La coordinación de estos dos procesos permite determinar si el sistema planteado es compatible o incompatible a través del análisis de las matrices de coeficientes (A) y ampliada (A/B) reducidas por filas, obteniendo la solución por los métodos de Gauss o Gauss-Jordan. Si el alumno logra coordinarlos y relacionarlos ha alcanzado el nivel proceso en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por métodos matriciales que será encapsulado en objeto a través de la interpretación geométrica del conjunto solución del mismo. Para ello es necesario haber alcanzado una concepción proceso de los temas ecuaciones de la recta y del plano en R^3.

METODOLOGÍA

La investigación se realizó durante el cursado de la asignatura Algebra que corresponde al Ciclo Básico de las carreras de Ingeniería en Agrimensura, Electrónica, Informática y de Minas de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la Universidad Nacional de Catamarca. Se trata de una investigación de carácter descriptivo "ya que busca especificar propiedades importantes de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno que sea sometido a análisis" Dankhe (1986) citado por Hernández Sampieri et.al. [13]. Desde el punto de vista temporal es una investigación de carácter transversal ya que se considera un instante determinado durante el cursado de la asignatura para poner en práctica el instrumento de recolección de datos. La población consistió en alumnos de primer año de las carreras mencionadas y como unidad de análisis se consideraron 39 alumnos que no sean reinscriptos y que no hayan cursado carreras afines a las ciencias exactas previamente.

Se utilizó como instrumento de recolección de datos un cuestionario semi-estructurado que consistió en la realización de cuatro actividades relacionadas con el tema en estudio. El objetivo del instrumento fue determinar los niveles de acción, en el marco de la teoría APOE, para los temas involucrados en la descomposición genética del concepto sistemas de ecuaciones lineales. Este instrumento consistió en las siguientes actividades:

Actividad 1: Sea la matriz **[A: B]** ampliada en su forma escalonada y sea su sistema de ecuaciones lineales asociado. $[A:B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & K & L \end{array}\right]$

Indique, justificando su respuesta, si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

a) Si K≠ 0, el sistema es compatible determinado.
b) Si K = 0 y L = 0 el sistema es incompatible.

c) Si K=0 la matriz de coeficientes [A] es singular
d) Si K = 0 y L≠ 0, el sistema es incompatible.

El objetivo de esta actividad consistió en indagar si los alumnos pueden determinar la compatibilidad o no de un sistema de ecuaciones lineales a través de su matríz escalonada-reducida por filas.

Actividad 2: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones (Método Libre):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Actividad 3**:** Resolver el sistema de ecuaciones lineales homogéneo **A.X =$\overline{\mathbf{0}}$** cuya matriz de coeficientes **[A]** es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Estas actividades tuvieron por objetivo indagar si el alumno resuelve correctamente los sistemas de ecuaciones lineales en forma matricial.

Actividad 4: Sea el sistema homogéneo correspondiente a la actividad anterior.

a) Interprete geométricamente el sistema de ecuaciones y su conjunto solución.
b) Indique un sistema de ecuaciones equivalente al de la Actividad 3.
c) Indique si la matriz [A] de la Actividad 3 es no singular.
d) Especifique con palabras las operaciones elementales de filas realizadas. (Una de cada una).

En esta serie de preguntas realizadas en función de la descomposición genética propuesta se indaga si el alumno interpreta geométricamente el sistema de ecuaciones (Intersección de tres planos en R^3) y su conjunto solución (Un punto en el espacio de coordenadas (0,0,0) o una recta en R^3 cuyas ecuaciones paramétricas son del tipo x=aλ, y= bλ, z=cλ. Se analizó si el alumno ha logrado en el momento de la aplicación del instrumento la concepción proceso en el tema "ecuaciones de la recta y el plano en R^3"

Luego se solicitan conceptos relacionados con la semejanza de matrices, matriz reducida, y singularidad de la matriz. Tanto la actividad 1, como los apartados b, c, y d de la tercera actividad tienen por objetivo determinar si el alumno ha logrado la concepción proceso del concepto "operaciones con matrices" y "matrices reducidas por filas, operaciones elementales, matrices equivalentes por filas".

Los resultados obtenidos a través de la aplicación del instrumento se clasificaron en tres categorías de acuerdo a la descomposición genética del concepto propuesta:

a) Alumnos que interpretan la formulación matricial de un sistema de ecuaciones lineales, la compatibilidad del mismo a través del análisis de las matrices de coeficientes y ampliada reducida por filas, es decir que han logrado un nivel Proceso en el tema Matrices, Operaciones con Matrices. (A)
b) Alumnos que resuelven correctamente el sistema de ecuaciones lineales, obteniendo el conjunto solución del mismo. (B)

c) Alumnos que interpretan geométricamente el sistema de ecuaciones lineales, es decir la intersección de planos, como el conjunto solución del mismo, que puede tratarse de las coordenadas de un punto en el espacio R^3, si el sistema es compatible determinado, o las ecuaciones paramétricas de una recta o de un plano si el sistema es indeterminado (C).

RESULTADOS

En Tabla 1 se presentan los resultados obtenidos considerando los 39 casos estudiados. La categoría A representa respuestas correctas al tema Matrices y Operaciones con Matrices, la categoría B representa si obtienen la solución del sistema de ecuaciones lineales por métodos matriciales y la categoría C indica si interpretan geométricamente el conjunto solución obtenido.

Tabla 1: Frecuencias de respuestas correctas de Las actividades propuestas en el instrumento de recolección de datos.

CATEGORÍA	A	B	C
Correctas	32	30	18
Incorrectas	7	9	21

Fuente: elaboración propia.

Se observan elevados niveles de respuestas correctas en identificar matricialmente un sistema de ecuaciones lineales y un poco menor en obtener correctamente la solución del mismo, mientras que la mayor frecuencia de respuestas incorrectas se produce en la interpretación geométrica del sistema de ecuaciones y de su conjunto solución. De la población correspondiente al estudio realizado, trece alumnos (33 %) logran responder correctamente las tres categorías del cuestionario, es decir que de acuerdo a la descomposición genética propuesta en este trabajo han alcanzado encapsular el concepto “Sistemas de Ecuaciones Lineales” en nivel Objeto. Otro grupo de trece alumnos (33%) no logran interpretar geométricamente el sistema ni su solución, por lo que no han encapsulado el concepto en estudio, alcanzando el nivel Proceso, es decir que resuelven correctamente la actividad planteada sin estímulos externos aunque tienen dificultades para interpretar la solución del mismo.

En el análisis de las respuestas de los alumnos se pueden establecer los errores más frecuentes para cada una de las categorías en que ha sido dividido el cuestionario. Por ejemplo se observan dificultades en la interpretación de la compatibilidad del sistema del análisis de las matrices de coeficientes y ampliadas reducidas por filas. Un alumno reduce correctamente una matriz y obtiene lo siguiente:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

Remarca la última fila y afirma "*el sistema es incompatible*", indicando que es así porque la última fila se anula, lo que no es correcto.

Otro caso respondiendo a la "Actividad 1" del instrumento indica "*para que el sistema sea Compatible Determinado tiene que verificar que K≠0 y que L≠0*", lo que también es incorrecto, ya que solamente tiene que verificar la primera condición. Otro alumno en el mismo sentido afirma que "para que el sistema sea incompatible, se tiene que anular la última fila de la matriz de coeficientes [A]", lo que no es correcto ya que no menciona la matriz ampliada del sistema [A B].

Con respecto a la resolución de sistemas de ecuaciones por métodos matriciales, el error más frecuente proviene de errores en la realización de los cálculos correspondientes a las operaciones elementales de filas, lo que se traduce en que no pueden obtener la solución correcta. Un alumno responde:

"El conjunto solución es:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$"

O sea, que a pesar de haber llegado a la matriz reducida por filas no puede encontrar el conjunto solución, por no saber parametrizar el mismo.

La mayor cantidad de respuestas incorrectas se produce en la interpretación geométrica del sistema de ecuaciones y su conjunto solución. Algunos errores surgen de la incorrecta parametrización de la solución del sistema como por ejemplo un alumno que expresa: "La solución es un conjunto vacío $x_1=x_2=x_3=0$" confundiendo un conjunto que incluye al vector nulo con uno vacío. Otro alumno responde "el sistema presentado representa un sistema compatible indeterminado, es decir infinitas soluciones. Geométricamente son tres planos en R^3", es decir que no identifica a la solución del sistema como la intersección de tres planos. Un tercer alumno expresa "el sistema es compatible indeterminado, tiene solución única y las rectas se chocan en un mismo punto".

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$"

Es decir que determina correctamente la solución del sistema, presentando dificultades en la interpretación geométrica del mismo. En otro caso se observan errores en la parametrización de la solución, presentando la solución del sistema como "una recta (-t2+2t1, t1, t2)", es decir errores de parametrización de la solución.

CONCLUSIONES

En función de lo analizado en las producciones de los alumnos, la mayor dificultad observada radica en la incorrecta interpretación geométrica de la solución del sistema o en su defecto de la incorrecta parametrización del conjunto solución del mismo, es decir que un grupo importante de alumnos considerados no ha logrado encapsular el concepto de sistemas de ecuaciones lineales en un objeto, dificultad que radica en la incorrecta interpretación geométrica de la solución del mismo. Este grupo de alumnos tiene dificultades en identificar una recta en el espacio a través de sus ecuaciones paramétricas, lo que implica que no han logrado alcanzar un nivel objeto del tema de acuerdo a la descomposición genética del mismo.

En función de los resultados obtenidos del análisis se propone intensificar la componente geométrica del concepto en estudio, utilizando por ejemplo Software de Geometría Dinámica GeoGebra que permite visualizar los objetos matemáticos a través de sus distintas representaciones como algebraica, geométrica o tabular a través de la vista algebraica, vista geométrica o planilla de cálculo en forma simultánea y dinámica del citado software.

REFERENCIAS

[1] OKTAÇ, A., & TRIGUEROS, M. (2010). ¿ Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal?. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 13(4).

[2] PARRAGUEZ GONZÁLEZ, M., & UZURIAGA LÓPEZ, V. L. (2014). Construcción y uso del concepto combinación lineal de vectores. Scientia et Technica, 19(3).

[3] PARRAGUEZ, M., & OKTAÇ, A. (2012). Desarrollo de un esquema del concepto espacio vectorial. Paradigma, 33(1), 103-134.

[4] CARRILLO, C. E. I. (2017). Análisis del desempeño estudiantil en el uso de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales. Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa.

[5] GALLO, H. & HERRERA, C. (2017): Coordinación de Registros de Representación Semiótica en el tema Sistemas de Ecuaciones Lineales.Encuentro Nacional y XII Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Santiago del Estero. Mayo de 2017.

[6] RAMOS, C.A. & HERRERA, C.G. (2017): Utilización de software de geometría dinámica en el aprendizaje de conceptos de Algebra Lineal. Producción Científica de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas VI. Editorial Científica Universitaria. Año 2017. Pág 17/24.

[7] RODRIGUEZ SALEMI, C.; HERRERA, C.G. (2015): Transformaciones lineales en el plano. Una experiencia didáctica. Debates, reflexiones e interrogantes en la Educación en Ciencias. Edición 2015. Pag. 123-124

[8] VERÓN, C.; MORENO, O.; HERRERA, C.G.; DIP H. R. (2015): Utilización de software dinámico en el estudio de las cónicas. Una experiencia didáctica. Debates, reflexiones e interrogantes en la Educación en Ciencias. Edición. Pag. 127-128

[9] DUBINSKY, E., & MCDONALD, M. (1991) APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. New ICMI Study Series.

[10] DUBINSKY, E. (1996) Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. Educación matemática, 8(3), 24-41.

[11] ASIALA, M., BROWN, A., DEVRIES, D. J., DUBINSKY, E., MATHEWS, D., & THOMAS, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Maa Notes, 37-54.

[12] TRIGUEROS, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. Educación matemática, 17(1).

[13] HERNÁNDEZ SAMPIERI, R., FERNANDEZ COLLADO, C. & BAPTISTA LUCIO, P. (1998). Metodología de la Investigación. Segunda Edición. Mc. Graw – Hill. México. D.F.